تمهيد

Integration التكامل

Antidrevatives عكس التفاضل

توجد في الرياضيات الكثير من العمليات العكسية، الطرح عكس الجمع، القسمة عكس الضرب، والجذر عكس الرفع حيث ان كل منها تزيل تأثير الاخرى.
وفي هذا الفصل سندرس عملية عكس الاشتقاق وتدعى عملية التكامل ولتوضيح ذلك: ليكن

$$f_1(x) = x^2 \Rightarrow f_1'(x) = 2x$$
$$f_2(x) = x^2 + 2 \Rightarrow f_2'(x) = 2x$$
$$f_3(x) = x^2 - 7 \Rightarrow f_3'(x) = 2x$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$f_n(x) = x^2 + c \Rightarrow f_n'(x) = 2x$$

حيث $c \in R$ عدد ثابت
نلاحظ ان مشتقة كل دالة من تلك الدوال تساوي $2x$. والتي تمثل ميل المنحني عند كل نقطة من نقاطه.
ان عملية ارجاع هذه المشتقة الى الدالة التي تم اشتقاقها تسمى عملية التكامل.

عملية التكامل: هي عملية معاكسة لعملية التفاضل ويرمز لهذه العملية بالرمز $(\int)$ ونعبر عن عكس عملية الاشتقاق للدالة $f(x)$ باستعمال هذه الصورة : $\int f(x)dx = F(x) + c$
فنلاحظ ان مشتقة الدوال $y = x^2 , y = x^2 + 1 , y = x^2 + 5$ هو $y' = 2x$ وبالتالي فان تكامل (2x) ويرمز له $\int 2x\,dx = x^2 + c$ حيث يمكن ان تكون $c = 0, 1 , 2 \ldots$ اما الرمز dx فيعني ان التكامل يجري بالنسبة للمتغير (x) حيث ان أي رمز اخر نعتبره ثابتا . لكن هذه الطريقة في التكامل التي ترجع الدوال الى اصولها عملية ليست يسيرة دائما لذلك سوف نحدد قواعد عامة لتكاملات الدوال الجبرية والدائرية وكما يلي :-

ملاحظات: قبل اجراء التكامل :-

❶ نتخلص من الاقواس ان وجدت (التوزيع , مربع حدانية)
❷ نتخلص من الجذور اينما وجدت وذلك بتحويلها الى اس كسري
❸ نتخلص من الكسور ان وجدت (حلل واختصر المقام او نرفع المقام الى البسط مع تغيير اشارة الاس

ملاحظات: بعد اجراء عملية التكامل :-

❶ نتخلص من الاس السالب (ننزله للمقام) ❷ اذا كان الاس كسر فيفضل ان نرجعه الى جذر
❸ عند اجراء التكامل نحذف رمز التكامل ودليل التكامل

قواعد التكامل غير المحدد

اولاً: تكامل الثابت $\int a\,dx = ax + c$

Example 1 : Evaluate the following integrals:

1) $\int 3\,dx = 3x + c$ نضرب الثابت في المتغير الموجود في دليل التكامل

2) $\int \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + c$ 3) $\int dx = x + c$ 4) $\int \sqrt{5}\,dx = \sqrt{5}x + c$

5) $\int y\,dx = yx + c$ 6) $\int \sqrt{z^2 + 3z + 2}\,dx = \sqrt{z^2 + 3z + 2}\,x + c$

ثانياً: تكامل حد مرفوع الى اس: نضيف واحد الى الاس ثم نقسم على الاس الجديد

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

Example 2 : Evaluate the following integrals:

1) $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c$ 2) $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$ يضاف الى الاس واحد ونقسم على الاس الجديد

3) $\int x^5\,dx = \frac{x^6}{6} + c$

الاس n ممكن ان يكون عدد صحيح موجب او صحيح سالب او اس كسر

4) $\int x^{-3}\,dx = -\frac{x^{-2}}{2} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

6) $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$ 7) $\int x^{-\frac{2}{5}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + c = \frac{5}{3}\sqrt[5]{x^3} + c$

ملاحظة: لا يمكن تكامل الجذور الا بعد تحويلها الى اسس حيث $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

ملاحظة: اذا كان الاس كسر موجب فان الاس الجديد هو $\frac{\text{البسط+المقام}}{\text{المقام نفسه}}$, واذا كان الاس سالب $\frac{-\text{البسط+المقام}}{\text{المقام نفسه}}$

8) $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$

9) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}\,x^{\frac{5}{3}} + c = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + c$

ثالثاً: تكامل ثابت في حد مرفوع الى اس: نضيف واحد الى الاس ثم نقسم على الاس الجديد أيضاً

$$\int ax^n\,dx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + c \quad , n \neq -1$$

Example 3 : Evaluate the following integrals:

1) $\int 3x^4\,dx = \frac{3}{5}x^5 + c$ 2) $\int 2x\ dx = 2\left(\frac{1}{2}\right)\ x^2 + c = x^2 + c$

3) $\displaystyle\int \frac{1}{2}\ x^3\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\ x^4 + c = \frac{1}{8}\ x^4 + c$

رابعاً: تكامل حاصل جمع او طرح عدة دوال $\int\ [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx + c$

Example 4: Evaluate the following integrals:

1) $\displaystyle\int (3x^2+5)\,dx = 3\left(\frac{1}{3}\right)x^3 + 5x + c = x^3 + 5x + c$

2) $\displaystyle\int (6x^2-4x+3)\,dx = 6\left(\frac{1}{3}\right)\ x^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)x^2 + 3x + c = 2x^3 - 2x^2 + 3x + c$

3) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\ dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}\right)\ dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{-2}{3}}\right)\ dx$

$\displaystyle = \frac{2}{3}\ x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} + c = \frac{2}{3}\ \sqrt{x^3} + 3\ \sqrt[3]{x} + c$

4) $\displaystyle\int \left(3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int \left(3x^2 + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)dx = \int \left(3x^2 + x^{\frac{-1}{2}}\right)\ dx$

$\displaystyle = 3\left(\frac{1}{3}x^3\right) + 2x^{\frac{1}{2}} + c = x^3 + 2\sqrt{x} + c$

خامساً: تكامل قوس مرفوع الى اس مع توفر مشتقة داخل القوس: نعامله معاملة الحد مرفوع الى اس

$$\int\ [f(x)]^n\ f'(x)\ dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

مـلاحظـة: لايجاد التكامل لأي قوس مرفوع الى قوى معينة

❶ اذا كانت مشتقة داخل القوس هي نفسها خارج القوس نقوم بتطبيق القاعدة الخامسة مباشرة

❷ اذا كانت مشتقة داخل القوس تختلف عن خارج القوس (بعدد ثابت) نقوم باجراء موازنة على السؤال ثم تطبيق القاعدة الخامسة

❸ اذا كانت مشتقة داخل القوس تختلف عن خارج القوس بمتغير فهناك احتمالان اما نعيد صياغة السؤال باستخدام احدى طرق التحليل (العامل المشترك او المربع الكامل او غيرها) او بالتخلص من الاقواس ثم استخدام القاعدة المناسبة وخصوصاً الرابعة .

Example 4: Evaluate the following integrals:

1) $\displaystyle\int (x^3+7)^5\ 3x^2\ dx = \frac{(x^3+7)^6}{6} + c$

2) $\displaystyle\int (x^3+7)^5\ x^2\ dx$ يجب ان نوفر مشتقة داخل القوس أي نضرب في $\frac{3}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\int (x^3+7)^5\,(3x^2)\;dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3+7)^6}{6}+c = \frac{1}{18}(x^3+7)^6+c$$

$3)\ \int (3x^2+1)^2\,dx$ نحلل بطريقة مربع حدانية

$$= \int (9x^4+6x^2+1)\;dx = \frac{9}{5}x^5+\frac{6}{3}x^3+x+c = \frac{9}{5}x^5+2x^3+x+c$$

$4)\ \int \sqrt[5]{(1-3x)^2}\;dx$

$$\Rightarrow \int (1-3x)^{\frac{2}{5}}\,dx \quad * \frac{-3}{-3}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{2}{5}}\,(-3)dx = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{7}{5}}(1-3x)^{\frac{7}{5}}+c = -\frac{5}{21}(1-3x)^{\frac{7}{5}}+c$$

$$= -\frac{5}{21}\sqrt[5]{(1-3x)^7}+c$$

$$5)\ \int x^2\sqrt{x^3+4}\;\;dx = \int (x^3+4)^{\frac{1}{2}}\,x^2\,dx = \frac{1}{3}\int (x^3+4)^{\frac{1}{2}}\,(3x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)(x^3+4)^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+)^3}+c$$

$6)\ \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2dx = H.W$

ملاحظة: لا توجد قاعدة مباشرة لتكامل حاصل ضرب دالتين كما في موضوع المشتقة وعندها اما نتخلص من الاقواس ونستخدم القاعدة الرابعة او بإيجاد مشتقة داخل القوس ونجدها خارجه لاستخدام القاعدة الخامسة.

Example 4: Evaluate the following integrals:

$1)\ \int (x^2+1)(2x-3)\,dx$

$$= \int 2x^3-3x^2+2x-3.\,dx = \frac{2x^4}{4}-\frac{3x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}-3x+c$$

$$= \frac{1}{2}x^4-x^3+x^2-3x+c$$

$$2)\ \int (3x-1)(x+5)\,dx = \int (3x^2+15x-x-5)\,dx$$

$$= \int (3x^2+14x-5)\,dx = 3\frac{1}{3}x^3+14\frac{1}{2}x^2-5x+c = x^3+7x^2-5x+c$$

$$4)\ \int \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+5)\ dx = \quad H.W$$

تكامل قسمة دالتين:

a) اذا كان البسط مشتقة للمقام فان ناتج التكامل هو $\ln|\text{المقام}|$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = ln|f(x)| + c$$

$$\int \frac{4x+3}{2x^2+3x-8}dx = ln\left|2x^2+3x-8\right| + c$$

$$\int \frac{2x+1}{2x^2+2x-6}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(2x+1)}{2x^2+2x-6}dx = \frac{1}{2}ln\left|2x^2+2x-6\right|$$

b) اذا لم يكن البسط مشتقة للمقام

ملاحظة: لا توجد قاعدة مباشرة لتكامل حاصل قسمة دالتين كما في موضوع المشتقة وعندها يجب التخلص من المقام بثلاث طرق :

1. اذا كان لدينا بسط ومقام قابل للتحليل نحلل ثم نختصر وبعدها نجري عملية التكامل
2. اذا كان لدينا قوس مرفوع الى اس في المقام نرفعه للبسط ونغير اشارة الاس
3. اذا كان لدينا حدودية ثلاثية في المقام تحلل بشكل مربع كامل في هذه الحالة نحلل ومن ثم نرفع القوس للبسط مع تغيير اشارة الاس .

Example 6: Evaluate the following integrals:

$$1)\ \int \frac{x^4-8x}{x-2}dx$$ تحليل البسط باستعمال العامل المشترك

$$= \int \frac{x(x^3-8)}{x-2}dx$$ تحليل القوس كفرق بين مكعبين

$$= \int \frac{x(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)}dx = \int (x^3+2x^2+4x)dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + c = \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + c$$

$$2)\ \int \frac{x^3+27}{x+3}\ dx$$ البسط مجموع مكعبين

$$= \int \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{(x+3)}\ dx = \int (x^2-3x+9)\ dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x + c$$

مـلاحظـة: كل دالة في المقام مرفوعة الى اس نرفعها الى البسط مع تغيير اشارة الاس

$$7)\ \int \frac{x^3-2x^2+1}{5x^5}\,dx$$

$$= \int (x^3-2x^2+1)\cdot(5x^{-5})dx = \int \left(5x^{-2}-10x^{-3}+5x^{-5}\right)dx$$

$$= 5\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right)-10\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right)+5\left(\frac{x^{-4}}{-4}\right)+c = -\frac{5}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{5}{4x^4}+c$$

$$8)\ \int \frac{\sqrt[3]{x^2}+2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

$$= \int \frac{x^{\frac{2}{3}}+2}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int \left(x^{\frac{2}{3}}+2\right)\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \int \left(x^{\frac{1}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}\right)dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+\frac{2x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+c$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{4}{3}}+\left(\frac{3}{2}\right)2x^{\frac{2}{3}}+c = \left(\frac{3}{4}\right)x^{\frac{4}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}+c$$

$$10)\ \int \frac{(x-2)}{(x^2-4x+5)^2}\,dx = \int (x^2-4x+5)^{-2}(x-2)dx \quad *\frac{2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2-4x+5)^{-2}(2x-4)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-4x+5)^{-1}}{-1}+c$$

$$= \frac{-1}{2(x^2-4x+5)}+c$$

$$12)\ \int \frac{x^2+2}{\sqrt[3]{x^3+6x+1}}\,dx = \int \frac{x^2+2}{(x^3+6x+1)^{\frac{1}{3}}}\,dx$$

$$= \int (x^3+6x+1)^{-\frac{1}{3}}(x^2+2)dx = \frac{1}{3}\int (x^3+6x+1)^{-\frac{1}{3}}\,3(x^2+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int (x^3+6x+1)^{-\frac{1}{3}}\,(3x^2+6)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(x^3+6x+1)^{\frac{2}{3}}+c$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+6x+1)^2}+c$$

ملاحظة: اذا كان داخل الجذر حدودية ثلاثية تحلل بشكل مربع كامل :-

$\left(\sqrt{\text{الحد الثالث}} \pm \sqrt{\text{الحد الاول}}\right)^2$

$$1)\ \int \sqrt[3]{x^2+12x+36}\ dx = \int \sqrt[3]{(x+6)^2}\,dx = \int (x+6)^{\frac{2}{3}}\,dx = \left(\frac{3}{5}\right)(x+6)^{\frac{5}{3}}+c$$

$$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{(x+6)^5}+c$$

$$2)\ \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^2-14x+49}}\ dx = \int \frac{1}{\sqrt[5]{(x-7)^2}}\,dx = \int \frac{1}{(x-7)^{\frac{2}{5}}}\,dx$$

$$= \int (x-7)^{-\frac{2}{5}}dx = \frac{(x-7)^{\frac{3}{5}}}{\frac{3}{5}}+c = \frac{5}{3}\sqrt[5]{(x-7)^3}+c$$

$$3)\ \int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^2+16x+64}} = \int \frac{1}{\sqrt[5]{(x+8)^2}}\ dx = \int \frac{1}{(x+8)^{\frac{2}{5}}}\ dx$$

$$= \int (x+8)^{\frac{-2}{5}}\,dx = \frac{5}{3}\ (x+8)^{\frac{3}{5}}+c = \frac{5}{3}\ \sqrt[5]{(x+8)^3}+c$$

ملاحظة: اذا وجد داخل الجذر عامل مشترك نستخرج العامل المشترك (يكون العامل المشترك غالبا يساوي دليل الجذر) ثم نوزع الاس ومن ثم نتأكد من مشتقة داخل القوس ثم نستخدم القاعدة المناسبة

$$4)\ \int \sqrt[7]{2x^9-3x^7}\ dx = \int \sqrt[7]{x^7(2x^2-3)}\,dx$$ استخراج x^7 عامل مشترك

$$= \int (2x^2-3)^{\frac{1}{7}}(x)dx \quad * \frac{4}{4}$$

$$= \frac{1}{4}\int (2x^2-3)^{\frac{1}{7}}(4x)dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(2x^2-3)^{\frac{8}{7}}}{\frac{8}{7}}+c = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}(2x^2-3)^{\frac{8}{7}}+c$$

$$= \frac{7}{32}\sqrt[7]{(2x^2-3)^8}+c$$

$$6)\ \int \sqrt[3]{2x^5-7x^3}\ dx = \int [x^3(2x^2-7)]^{\frac{1}{3}}\,dx = \int (x^3)^{\frac{1}{3}}(2x^2-7)^{\frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \int (2x^2-7)^{\frac{1}{3}}\,xdx = \frac{1}{4}\int (2x^2-7)^{\frac{1}{3}}(4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\ (2x^2-7)^{\frac{4}{3}}+c = -\frac{3}{16}\sqrt[3]{(2x^2-7)^4}+c$$