Binomial Expansion مفكوك ذي الحدين [2.1]

ليكن n عددا صحيحا موجبا. يعرف مضروب (factorial) العدد n بانه حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة من العدد ١ الى العدد nويرمز له بالرمز n! ، أي أن

n!=n.(n-1).(n-2).(n-1). . . 3.2.1 for example

ليكن n عددا صحيحا موجبا. يعرف مضروب ((factorial العدد n بانه حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة من العدد ١ الى العدد nويرمز له بالرمز n! ، أي أن

n!=n.(n-1).(n-2).(n-1). . . 3.2.1 for example

1!=1
2!= 2.1=2
3!=3.2.1=6
4!=4.3.2.1=24
5!=5.4.3.2.1=120
6!=6.5.4.3.2.1=720
7!=7.6.5.4.3.2.1=5040
8!=8.7.6.5.4.3.2.1=40320
9!=9.8.7.6.5.4.3.2.1=362880
10!=10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=3628800
11!=11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1=39916800

Remark (1);
From definition immediately we conclude that:

ملاحظة؛ من التعريف فورا نستنتج أن :

1) n!= n.(n-1)! Where n an integer number حيث n عدد صحيح موجب
2) 0!= 1

This is because for وذلك لأن

(1) n!=n.(n-1).(n-2).(n-1). . . 3.2.1= n(n-1)!

Because it is بما أنه

n!= n.(n-1)! For n an integer number.

we take ناخذ

n=1 ⇒ 1!=1.0! and because that 1!= 1 ⇒ 0!=1

Definition:

Suppose that (n ,r) is positive an integer number such that r≤n . define the magnitude by a binomial coefficient and denoted to it also by symbol $\binom{n}{r}$ that is $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ So, easily we can proof that بسهولة يمكن إثبات

1) $\binom{n}{r} = 1$

2) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ for instance

$$\binom{16}{3} = \frac{16!}{3!.13!} = \frac{16.15.14}{3.2.1} = 560$$

$$\binom{12}{4} = \frac{12!}{4!.8!} = \frac{12.11.10.9}{4.3.2.1} = 490$$

$$\binom{15}{5} = \frac{15!}{5!.10!} = \frac{15.14.13.13.11}{5.4.3.2.1} = 3003$$

Binomial Theorem : if each from (a ,b) be real number and it has been n an integer number then :

مبرهنة ذي الحدين : إذا كان كل من a ,b عددا حقيقيا وكان n عددا صحيحا فأن

$$(a+b)^{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^{r}$$

Now ,we will prove that by mathematical induction method سنبرهن بطريقة الأاستقراء الرياضي

١)where n=1 عندما n=١

$$\sum_{r=0}^{1} \binom{1}{r} a^{1-r} b^{r} = \binom{1}{0} ab^{0} + \binom{1}{1} a^{0}b = a + b = (a + b^{1})$$

Hence then the paragraph is correct where n=1 . so that ,

أذن العبارة صحيحة عندما n=1

٢)- suppose that the paragraph is correct where n= k , we presume (supose)

$$(a+b)^{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} a^{n-r} b^{r}$$

And we are prove that is correct when n=k+1

$$(a+b)^{k+1} = \sum_{r=0}^{1} \binom{k+1}{r} a^{k+1-r} b^{r}$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^{k} = (a+b) \sum_{r=0}^{1} \binom{k}{r} a^{k-r} b^{r}$$

$$= (a+b)\left[\binom{k}{0} a^{k} + \binom{k}{1} a^{k-1} b + \binom{k}{2} a^{k-2} b^{2} + \cdots + \binom{k}{k-1} a b^{k-1} + \binom{k}{k} b^{k} \right.$$

$$= \binom{k}{0} a^{k+1} + \binom{k}{1} a^{k} b + \binom{k}{2} a^{k-1} b^{2} + \cdots + \binom{k}{k-1} a^{2} b^{k-1} + \binom{k}{k} a b^{k}$$
$$+ \binom{k}{0} a^{k} b + \binom{k}{1} a^{k-1} b^{2} + \binom{k}{2} a^{k-2} b^{3} + \ldots + \binom{k}{k-1} a b^{k} + \binom{k}{k} b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = \binom{k}{0} a^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right] a^{k} b + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right] a^{k-1} b^{2} + \ldots +$$
$$\left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right] a b^{k} + \binom{k}{k} a^{k+1}$$

$$= \binom{k+1}{0} a^{k+1} + \binom{k+1}{1} a^{k} b + \binom{k+1}{2} a^{k-1} b^{2} + \ldots + \binom{k+1}{k} a b^{k} +$$
$$\binom{k+1}{k+1} b^{k+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} a^{k+1-r} b^{r}$$

Therefore the paragraph is correct for all n= k+1 values. So , that the paragraph is correct for all n values form a positive an integer numbers :

اذا العبارة صحيحة لجميع قيم n= k+1 أي أن العبارة صحيحة لجميع قيم n من الأعداد الصحيحة الموجبة .

Remark (2):

The Binomial theorem, called by Newton theory because the first who researched the English mathematician ashaq Newton , also should notice these the following properties for Binomial expansion $(a + b)^n$

1) The number of limits in the Binomial expansion is n +1 from limits.

2) Total of exponent a ,b in each limit is n .
3) Exponent decreases a Limit after limit, from n into zero and an increase exponent b , Limit after limit from zero into n .
4) Coefficient each limit is $\binom{n}{k}$ where k is exponent a or b , from this we conclude that the coefficient of limit r in expansion $(a+b)^{n}$ is $\binom{n}{r-1}$, n+1 , r = 1,2 , . . ., n+1 , also the limit r be in this expansion is

$$\binom{n}{r-1}\, a^{n+1-r} b^{\,r-1}$$

5) equal the coefficients of limits which is far on a start of expansion and end of expansion by same magnitude

تساوي معاملات الحدود التي هي بعيدة عن بداية التوسع ونهاية التوسع بنفس القدر..

6) Coefficients of powers (a+ b) consecutive. we could arrange it in the triangular from numbers called Al karkhi triangular (Basscal) as following.:

معاملات القوى (a + b) متتالية. يمكننا ترتيب ذلك في الثلاثي من أرقام تسمى الكرخي الثلاثي (بسكال) على النحو التالي.

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	1 4 6 4 1
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$	1 5 10 10 5 1
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$	1 6 15 20 15 6 1

Example (1) : prove that

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots \pm \binom{n}{n} = 0$$

Definition:

Let each $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_r$ positive real number such that $n_1 + n_2 + n_3 + \ldots + n_r = n_t$ the magnitude define $\frac{n!}{n1!\,.n2!\,.....nr!}$ it factorial r from limited and denoted by symbol $\binom{n}{n1!\,.\,n2!\ \ldots\ nr!}$ and

$$\binom{n}{n1!\,.\,n2!\ \ldots\ nr!} = \frac{n!}{n1!\,.n2!\,.....nr!}$$

Example (2) :

$$\binom{10}{3,7} = \frac{10!}{3!\,.7!} = 120$$

$$\binom{7}{2,3,2} = \frac{7!}{2!\,.3!2!} = 210$$

$$\binom{8}{4,2,2,0} = \frac{8!}{4!\,.2!2!,0!} = 420$$

But $\binom{11}{3,4,5,1}$ there is no meaning to it because $3+4+5+1 \neq 11$

Random Variable (المتغير العشوائي)[3.1]

تعريف:

لنفرض أن **S** هو فضاء العينة لتجربة عشوائية. إن المتغير العشوائي X هو دالة حقيقية معرفة على فضاء العينة S . (لابد أن تتحقق بعض الشروط على الدالة لكي تكون متغيرا عشوائيا ولكننا لن نتطرق إلى تلك الشروط)

ملاحظات:

١-إن المتغير العشوائي X يعطي قيمة حقيقية وحيدة لكل عنصر من عناصر فضاء العينة S .

٢- إن المتغير X العشوائي هو تطبيق مجاله فضاء العينة S ومجاله المقابل هو مجموعة الأعداد الحقيقية **R** أي أن، $X : S \rightarrow \mathbf{R}$.

Hence : if $x \in X : x = 1,2,3,4, , , , ,$

So, if $Rx = \{ x : x \in N \}$ Countable

$\therefore$ X is a Discrete Random Variables (d. r. v) متغير عشوائي متقطع

Probability Mass Function (P. M. f): (دالة الكتلة الاحتمال)

Let X be a Discrete Random Variables (d .v . r)

A function f is a P. M .f if f (x)= p (X=x) , and satisfy the following condition :

A) $f(x) \geq 0 , \forall x \in X$ B) $\sum_{\forall x \in X} f(x) = 1$

Note: 1- condition (A) shows the graph of f (x) above of the X- axis.

2- Also .if $A \subset S$ then $P(x \in A) = \sum_{\forall x \in A} f(x) = 1$

Example (1) : Given $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{10}, & \text{for } x = 0,1,2\ 3\ 4 \\ & \end{cases}$

Show that f (x) is a M. P. f

Solution:

To satisfy a Condition (A) T.P: $f(x) \geq 0 , \forall x \in X$

$f(0) = 0 , f(1) = \frac{1}{10} , f(2) = \frac{2}{10} , f(3) = \frac{3}{10} , f(4) = \frac{4}{10}$

$\therefore f(x) \geq 0 , \forall x \in X$

$\therefore$ Cond (1) is satisfied .

$$cond\ "2" \text{T.P.} \sum_{\forall x=0} f(x) = 1$$

$$\sum_{\forall x=0} f(x) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{2}{10} + \frac{3}{10} + \frac{4}{10} = 1$$

$\therefore$ f (x) is a P. M .f .