الأستاذ الدكتور : سامي ذياب

المحاضرة الثالثة

The Function الدالة

أي ظاهرتين في الكون يعتمد التغير الحاصل في احداهما على التغير الحاصل في الظاهرة الأخرى فانهما يشكلان دالة ، اذ يطلق على احداهما بالمتغير المستقل ، ويطلق على الأخرى بالمتغير التابع .

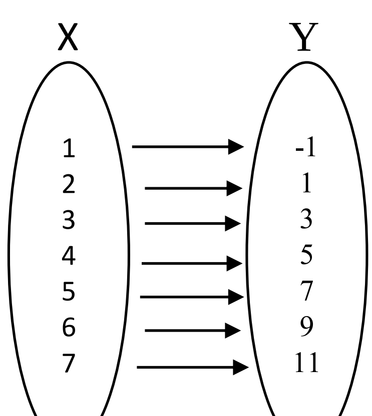
فالمتغير المستقل يبدأ بشكل مستقل ومنفصل عن الثاني ، ويتبعه التغير في قيمة المتغير التابع . فكلما يحصل تغير في المتغير المستقل يحصل تغيرا في المتغير التابع ويكون بالزيادة او بالنقصان (أي يكون التغير بين المتغيرين طرديا او عكسيا) .

وتظهر أهمية الدوال كونها أساس العلوم الأخرى مثل (الهندسة ، التفاضل والتكامل .... الخ) فهي عمود أساس في الرياضيات التحليلية .

1. تعريف الدالة :

يرمز للدالة $F(X)$: وهي العملية او العلاقة الرياضية التي يحصل فيها تغير بين ظاهرتين ، فيرمز للمتغير المستقل (X) ويرمز للمتغير التابع (Y) ، أي ان التغيير الحاصل في قيمة X يؤثر على قيمة (Y) .

وبهدف التوضيح يمكن تمثيلهما بمجموعتين (X) و (Y) ، فاذا كان لدينا المعادلة الجبرية $\mathbf{Y = 2X - 3}$ فيكون كل عنصر من مجموعة (X) هو مرتبط بعنصر من المجموعة (Y) ، كما في الشكل ادناه : بعد تعويض قيم X من (7،6،5،4،3،2،1) في المعادلة $\mathbf{Y = 2X - 3}$



if $X=1 \rightarrow y = 2(1) - 3 = -1$

if $X=2 \rightarrow y = 2(2) - 3 = 1$

if $X=3 \rightarrow y = 2(3) - 3 = 3$

if $X=4 \rightarrow y = 2(4) - 3 = 5$

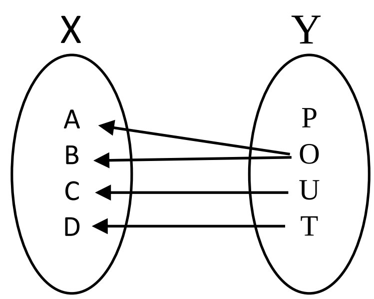
if $X=5 \rightarrow y = 2(5) - 3 = 7$

if $X=6 \rightarrow y = 2(6) - 3 = 9$

if $X=7 \rightarrow y = 2(7) - 3 = 11$

لذا يمكن ان تكون الدالة جبرية ، فيتم استخراج مقدارها على وفق $F(X) = X$ ، أي ان $F: X \rightarrow Y$ ، او يتم توضيحها بالرسم فتكون دالة هندسية .

- من خصائص الدوال اشتراك اكثر من عنصر من (X) في عنصر واحد من (Y) أحيانا ، ولا يجوز العكس كما في الشكل :



مثال : لدينا الدالة $Y = |X|$ ، فاذا كان X هو (2 و -2)

فتكون قيم Y كالاتي : $Y = |2| = 2$ ، $Y = |-2| = 2$

اما اذا كانت X هي (5 و -5) فتكون Y كالاتي : $Y = |5| = 5$ ، $Y = |-5| = 5$

وكذلك اذا كانت الدالة $Y = X^2$ وان X هي (3 و -3) فتكون قيم Y كالاتي : $Y = (3)^2 = 9$ ، $Y = (-3)^2 = 9$

ولا يجوز العكس : مثلا : اذا كان لدينا المعادلة $Y^2 = X$ فيكون $Y^2 = X \rightarrow \begin{matrix} Y = +\sqrt{X} \\ Y = -\sqrt{X} \end{matrix}$

فاذا كان $Y = (3)$ و (-3) ، فنتيجة التعويض بالمعادل ينتج $(3)^2 = 9$ ، $(-3)^2 = 9$ ، أي ان قيمة Y هي الناتج ، وهذا يؤشر بانها غير دالة وانما معادلة .

نستنتج بان الدالة هي استخراج لقيمة المتغير Y ، بدلالة المتغير X دائما . فحصول أي تغير في X يتبعه تغير في Y.

ملاحظة :

X : هي مجموعة المنطلق ، y : هي مجموعة الوصول

العنصر $y = F(X)$ هو صورة X بواسطة الدالة F

العنصر (X) هو اصل $y = F(X)$ بواسطة الدالة F

مثال : اذا كانت لدينا الدالة $y = \frac{-3}{2}x$ بتعبير آخر $F(x) = \frac{-3}{2}x$ ، فيمكن استخراج المتغير التابع (Y) بدلالة المتغير المستقل (X) عندما تكون قيم X = (0،1،2،3 ... الخ) بالمعادلة أعلاه :

Independent Variable المتغير المستقل	Dependent Variable المتغير التابع
0	0
1	-3/2
2	-3
3	-9/2
.	.
.	.

- مجال الدالة Function Domain: يعرف بانه مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة المنطلق والتي لها صور ورمزه D_f . (مجموعة القيم التي يسمح ان يأخذها المتغير X ، فتكون الدالة معرفة).
- مدى الدالة Function Range : مجموعة العناصر الموجودة في مجموعة الأصول والتي لها أصول ورمزه R_f. (مجموعة القيم التي تأخذها الدالة عموما) .

2. بعض خصائص الدوال :

- اذا كانت الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ ، لا يمكن ان تكون قيمة $\sqrt{x}$ سالبة ، أي يكون $X \geq 0$.

فيكون المجال (D) هو $D[\ 0\ ;+\infty\ [$ ، والقوس مفتوح للخارج اذ لو وضع القوس الأخير باتجاه ال(∞) فهذا يعني سيكون له نهاية .وهذا ينافي المنطق ، فتكون الدالة $F(x) \geq 0$ ، ويكون المجال D هو نفسه المدى R هو $R[\ 0\ ;+\infty\ [$.

- اذا كانت الدالة $F(X) = |X|$

هنا لا يوجد شرط ان لا تكون قيمة X سالبة (**يجوز ان تأخذ كل الاعداد الحقيقية**) ، فيكون المجال لها $D =]-\infty; +\infty[$ لكن الدالة يجب ان لا تكون سالبة ، أي $F(x) \geq 0$ ويكون $R = [\ 0\ ;\ +\infty\ [$ وهذا يعني ان $\mathbf{D \neq R}$. اذ يكون مجال الدالة على المحور X ممثلا بالرسم ويكون المدى R على المحور Y ممثلا بالرسم .

- اما اذا كان $f(x) = \frac{1}{x-3}$ هنا لا يمكن ان يساوي المقام صفر . أي ان $X \neq 3$. لان $X \in R - \{3\}$ أي تنتمي لكل الاعداد الحقيقية ما عدى (3) .

3. خطوات رسم الدوال :

- **إيجاد أوسع مجال للدالة حيث ان :**
  - في الدوال الخطية : يكون المجال R
  - في الدوال الكسرية : يكون المجال كل R ما عدا ما يجعل المقام صفرا .
- **إيجاد نقاط التقاطع** : توجد على المحورين : مرة نفرض قيم (X) تساوي صفرا فنوجد قيم (y) . ثم بالعكس نفرض قيم (y) صفرا فنوجد قيم (X) .
- **التناظر** : بالتعويض عن قيم (-X) لايجاد تناظر مع محور الصادات او نقطة الأصل او عدم وجود تناظر .
  - حول محور الصادات : عندما $F(-X) = F(X)$
  - حول نقطة الأصل : عندما $F(-X) = -F(X)$
- **نكون جدول في النقاط التي تم استخراجها ثم القيام بالرسم .**

4. امثلة على رسم الدوال

الدالة هي $F(X) = y$

لغرض رسم الدوال ينبغي رسم الاحداثيين (X) الافقي و (y) العمودي بشقيهما الموجب والسالب ومن ثم نحدد قيم y على وفق ما يعطى من قيم لـ (X) ويتم تثبيت النقاط على الاحداثيين وبعدها يتم الايصال بين النقاط الواقعة على الاحداثيين تباعا مما يتحدد لنا رسم الدالة واتجاهها .

مثال : جد قيم y عندما تكون قيم X هي (2- , 1- , 0 , 1 , 2) وارسم الدالة واتجاهها ،

للدالة $F(X) = X + 1$

$$F(X) = X + 1$$

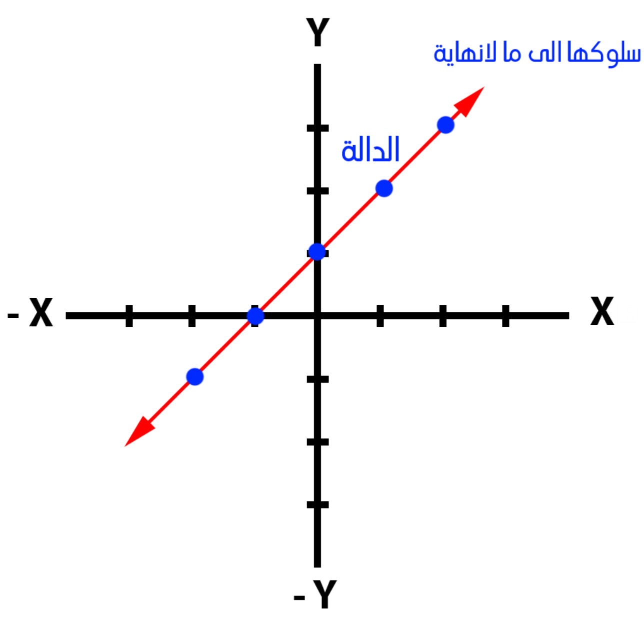
$$F(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$F(-1) = -1 + 1 = 0$$

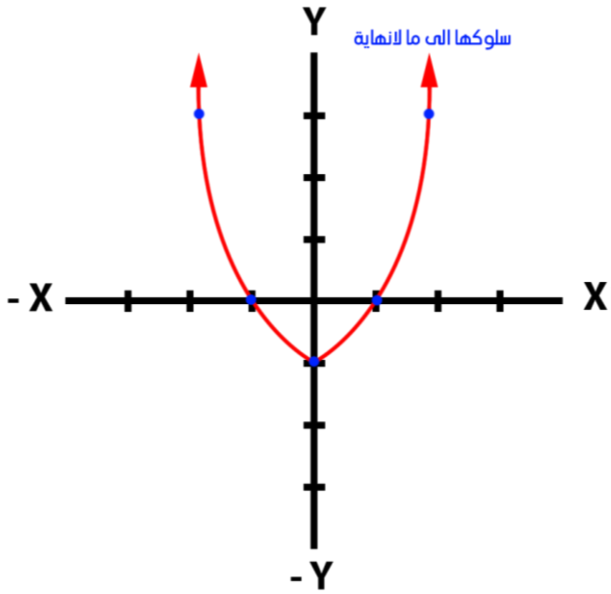
$$F(0) = 0 + 1 = 1$$

$$F(1) = 1 + 1 = 2$$

$$F(2) = 2 + 1 = 3$$



مثال : ارسم الدالة { $F(X) = X^2 - 1$ } لقيم (X) المعطاة في المثال السابق



$F(X) = X^2 - 1$

$F(-2) = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$F(-1) = (-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$F(0) = (0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

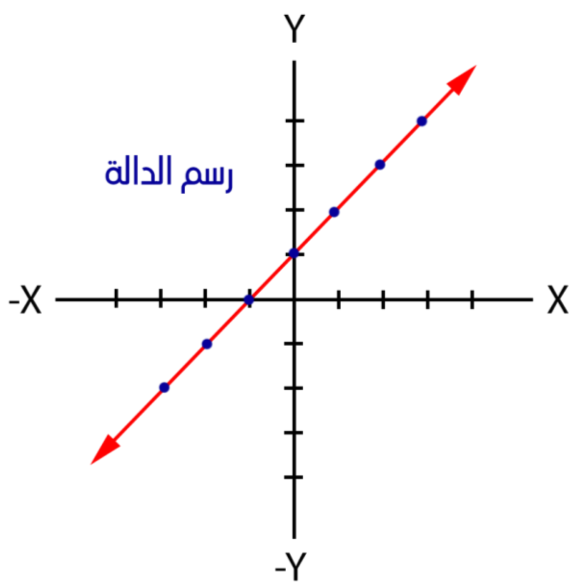
$F(1) = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$F(2) = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

مثال : جد قيم Y عندما تكون قيم X هي (3- , 2- , 1- , 0 , 1 , 2 , 3)

وارسم الدالة واتجاهها { $F(X) = X + 1$ }

الحل : $F(X) = X + 1$



$F(-3) = -3 + 1 = -2$

$F(-2) = -2 + 1 = -1$

$F(-1) = -1 + 1 = 0$

$F(0) = 0 + 1 = 1$

$F(1) = 1 + 1 = 2$

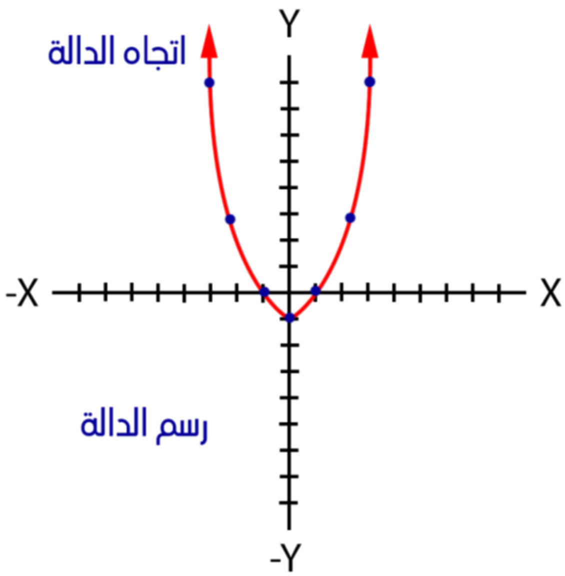
$F(2) = 2 + 1 = 3$

$F(3) = 3 + 1 = 4$

مثال : ارسم الدالة { $F(X) = X^2 - 1$ } لقيم (X) هي (3- , 2- , 1- , 0 , 1 , 2 , 3)

بعد إيجاد قيم (Y)

الحل : $F(X) = X^2 - 1$



$F(-3) = -3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$

$F(-2) = -2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$F(-1) = -1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$F(0) = 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

$F(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$

$F(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$F(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$