الفصل الرابع

مشكلة النقل

الفصل الرابع

مشكلة النقل (Transportation Problem)

تُركز مشكلة النقل على موضوع ابقاء كلف النقل أقل ما يمكن في عملية توزيع البضائع (السلع ، المواد ، ...) من نقاط العرض أو المصادر (مثل المصانع ، المخازن ، ...) الى نقاط الطلب (الاسواق ، نقاط البيع ، ...). كذلك تُستخدم مشكلة النقل عندما تحاول شركة أو مصنع أن تحدد مكان إقامة مرفقاً جديداً ، اذ ان من المستحسن قبل افتتاح مخزن جديد أو مصنع أو مكتب ، أن تأخذ الشركة في اعتبارها عددا من المواقع البديلة لغرض اختيار الموقع الذي يحقق الحد الادنى من تكاليف النقل.

للوصول للغرض أعلاه يمكن أستخدام أسلوب علمي خاص ينتمي لأساليب بحوث العمليات يسمى نموذج النقل (Transportation Model). وبذلك فان هذا الفصل يتضمن التعريف بنموذج النقل وثلاث طرق معتمدة لحل هذا النموذج وهي طريقة الركن الشمالي – الغربي ، طريقة الكلفة الأقل ، وطريقة فوجل.

التعريف بمشكلة النقل

تعتبر مشكلة النقل أحد الأساليب الرياضية المهمة التي تساعد في إتخاذ القرار المناسب لنقل كمية من مادة من المصادر (مراكز الإنتاج ، المخازن ، المعامل ...) الى الغايات (مراكز الطلب ، مراكز الإستهلاك ، الأسواق ، ...) لسد حاجاتها من هذه المادة وبأقل كلفة.

ويمكن بيان مشكلة النقل من خلال المثال أدناه:

لنفرض أنه لدينا عدد من المصادر (المخازن) في مواقع مختلفة وكل منها يحتوي على كمية معينة من سلعة ما ، في نفس الوقت يوجد عدد من الغايات (الأسواق) في مواقع مختلفة أيضاً وكل منها يحتاج

الى كمية معينة من هذه السلعة ، وأن كلفة نقل الوحدة الواحدة من هذه المادة من أي مصدر إلى أي غاية معلوم مسبقاً.

السؤال هنا:

كيف يتم نقل هذه السلعة الى الغايات وبالكميات التي تحتاجها وبأقل كلفة؟

الإجابة عن هذا التساؤل تكون بإتباع أحد طرق حل مشاكل النقل وكما سيأتي لاحقاً.

في هذا الفصل سنتعرف على:

- نموذج النقل ومكوناته.
- كيفية تمثيل نموذج النقل بجدول خاص.
- التعرف على شرط مهم يمكننا من حل مشاكل اللنقل وهو (شرط التوازن).
- طرق حل نماذج النقل.

نموذج النقل

يفترض نموذج النقل ما يأتي:

1) وجود (m) من المصادر و (n) من الغايات.
2) في كل مصدر يوجد $(a_1, a_2, \cdots, a_m)$ من الكميات المعروضة من مادة معينة.
3) في كل غاية يوجد $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ من الكميات المطلوبة من تلك مادة.
4) نقل الوحدة الواحدة من هذه المادة من المصدر (i) إلى الغاية (j) ويرمز لها بالرمز (c_{ij}).
5) الكمية المنقولة من المصدر (i) إلى الغاية (j) ويرمز لها بالرمز (x_{ij}).

حيث أن:

$$i = 1, 2, \cdots, m$$

$$j = 1, 2, \cdots, n$$

وبالتالي فإنه يمكن تمثيل نموذج النقل كما في الجدول أدناه:

الغايات / المصادر	D_1	D_2	$\cdots$	D_n	Supply الكميات المعروضة
S_1	$\boxed{c_{11}}$ x_{11}	$\boxed{c_{12}}$ x_{12}	$\cdots$	$\boxed{c_{1n}}$ x_{1n}	a_1
S_2	$\boxed{c_{21}}$ x_{21}	$\boxed{c_{22}}$ x_{22}	$\cdots$	$\boxed{c_{2n}}$ x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_m	$\boxed{c_{m1}}$ x_{m1}	$\boxed{c_{m2}}$ x_{m2}	$\cdots$	$\boxed{c_{mn}}$ x_{mn}	a_m
Demand الكميات المطلوبة	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

حيث أن (على سبيل المثال):

c_{12} : كلفة نقل الوحدة الواحدة من المادة من المصدر الأول الى الغاية الثانية.

x_{21} : الكمية (عدد الوحدات) المنقولة من المصدر الثاني الى الغاية الأولى.

a_1 : الكمية (عدد الوحدات) الموجودة (المعروضة) في المصدر الأول.

b_2 : الكمية (عدد الوحدات) المطلوبة في الغاية الثانية.

شرط التوازن

قبل البدء بعملية حل نماذج النقل لابد من توفر شرط أساسي وهو ما يسمى بشرط التوازن والذي يعني أن مجموع الكميات المعروضة مساوٍ لمجموع الكميات المطلوبة $(\sum a_i = \sum b_j)$. ولكن في الحياة

العملية نجد أن هذا الشرط غير متحقق لذلك يسمى النموذج في هذه الحالة بالنموذج غير المتوازن ، وهذا مايتطلب تحويله إلى نموذج متوازن وكما يأتي:

أولاً

إذا كانت الكميات المطلوبة أكبر من الكميات المعروضة $(\sum b_j > \sum a_i)$ نضيف مصدر (صف وهمي) تكون كلف النقل داخل خلاياه تساوي (صفر) والعرض عنده يساوي $(\sum b_j - \sum a_i)$. وكما في المثال أدناه:

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	6	11	10	60
2	7	8	4	50
3	6	7	3	10
Demand	70	60	20	

من الجدول أعلاه نلاحظ أن:

$$\sum b_i = 70 + 60 + 20 = 150$$

$$\sum a_i = 60 + 50 + 10 = 120$$

أي أن: $\sum b_j > \sum a_i$

هذا يعني أن النموذج غير متوازن لذلك يجب تحويله إلى نموذج متوازن من خلال إضافة (صف وهمي) تكون كلف النقل داخل خلاياه مساوية للصفر والكمية المعروضة تساوي:

$$\sum b_j - \sum a_i = 150 - 120 = 30$$

وبذلك نحصل على الجدول التالي:

Sources \ Destinations	1	2	3	Supply
1	6	11	10	60
2	7	8	4	50
3	6	7	3	10
4	0	0	0	30
Demand	70	60	20	

وهنا نلاحظ أن:

$$\sum b_j = \sum a_i = 150$$

أي أن النموذج متوازن.

ثانياً

إذا كانت الكميات المعروضة أكبر من الكميات المطلوبة $(\sum a_i > \sum b_j)$ نضيف غاية (عمود وهمي) تكون كلف النقل داخل خلاياه تساوي (صفر) والطلب عنده يساوي $(\sum a_i - \sum b_j)$. وكما في المثال أدناه:

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	1	3	3	50
2	6	8	7	60
3	2	4	5	10
Demand	20	10	5	

من الجدول أعلاه نلاحظ أن:

$$\sum b_i = 2010 + 5 = 35$$

$$\sum a_i = 50 + 60 + 10 = 120$$

أي أن: $\sum a_i > \sum b_j$

هذا يعني أن النموذج غير متوازن لذلك يجب تحويله إلى نموذج متوازن من خلال إضافة (عمود وهمي) تكون كلف النقل داخل خلاياه مساوية للصفر والكمية المعروضة تساوي:

$$\sum a_i - \sum b_j = 120 - 35 = 85$$

وبذلك نحصل على الجدول التالي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
1	1	3	3	0	50
2	6	8	7	0	60
3	2	4	5	0	10
Demand	20	10	5	85	

وهنا نلاحظ أن:

$$\sum b_j = \sum a_i = 10$$

أي أن النموذج متوازن.

طرق حل مشاكل النقل

توجد عدة طرق لحل نموذج النقل نذكر منها :

طريقة الركن الشمالي – الغربي

هي من أسهل الطرق المتبعة لحل مشاكل النقل ، وتبدأ بالحل من الزاوية الشمالية – الغربية في الجدول ولذلك سميت بهذا الاسم.

وخطوات الحل وفق هذه الطريقة تكون كالآتي:

أولاً :

نبدأ بالخلية الواقعة شمال غرب الجدول ونقارن الكمية المطلوبة مع الكمية المعروضة. أي نقوم بمقارنة قيمة (a_1) مع قيمة (b_1) فتظهر لنا ثلاث حالات:

1) إذا كانت $(b_1 < a_1)$ نضع $(x_{11} = b_1)$ ونطرح (b_1) من (a_1) ثم ننتقل أفقياً إلى خلية x_{12}.
2) إذا كانت $(b_1 > a_1)$ نضع $(x_{11} = a_1)$ ونطرح (a_1) من (b_1) ثم ننتقل أفقياً إلى خلية x_{21}.
3) إذا كانت $(b_1 = a_1)$ نضع $(x_{11} = a_1 = b_1)$ ثم ننتقل قطرياً إلى خلية x_{22}.

ثانياً :

نستمر بالعمل كما في الخطوة (أولاً) أعلاه حيث في كل مرة يتحقق أحد قيود النموذج بشكل متعاقب مبتعدين عن الزاوية الشمالية – الغربية حتى نصل إلى خلية جنوب شرق الجدول .

وهكذا تكون جميع قيود النموذج قد تحققت. وبعدها يتم إستخراج الكلفة الكلية لعملية النقل وكما يأتي:

الكلفة الكلية = مجموع حاصل ضرب (الكمية × الكلفة).

مثال (1)

حل مشكلة النقل التالية بإستخدام طريقة الركن الشمالي

Sources \ Destinations	1	2	3	Supply
1	7	3	10	22
2	4	6	2	24
3	5	9	1	14
Demand	18	22	20	

<u>الحل</u> يتم أولاً التحقق من شرط التوازن ، وهنا نلاحظ أن :

$$\sum a_i = \sum b_j = 60$$

أي أن النموذج متوازن ، وبالتالي يمكن البدء بالحل وكما يأتي:

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	$\boxed{7}$ 18	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{10}$	~~22~~ 4
2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 18	$\boxed{2}$ 6	~~24~~ 6
3	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$ 14	14
Demand	18	~~22~~ 18	~~20~~ 14	

بعدها نقوم بإعادة كتابة الجدول بالشكل التالي:

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	$\boxed{7}$ 18	$\boxed{3}$ 4	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$	$\boxed{6}$ 18	$\boxed{2}$ 6	24
3	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$ 14	14
Demand	18	22	20	

وبذلك تكون الكلفة الكلية:

$$z = 17(18) + 3(4) + 6(18) + 2(6) + 1(14) = 272$$

مثال (2)

حل مشكلة النقل التالية بإستخدام طريقة الركن الشمالي

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	6	11	10	70
2	7	8	4	60
3	6	7	3	20
Demand	60	50	10	

يتم أولاً التحقق من شرط التوازن ، وهنا نلاحظ أن :

$$\sum a_i = 150 \quad \& \sum b_j = 120$$

أي أن النموذج غير متوازن ، لذا نُضيف عمود وهمي بكلف نقل (أصفار) والطلب عنده يساوي:

$$\sum a_i - \sum b_j = 150 - 120 = 30$$

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
1	6	11	10	0	70
2	7	8	4	0	60
3	6	7	3	0	20
Demand	60	50	10	30	

يمكن الآن البدء بعملية الحل لأن النموذج أصبح متوازن.

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
1	$\boxed{6}$ 60	$\boxed{11}$ 10	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$	~~70~~ 10
2	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$ 40	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{0}$ 10	~~60~~ ~~20~~ 10
3	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 20	20
Demand	60	~~50~~ 40	10	~~30~~ 20	

وبذلك يكون لدينا الجدول التالي:

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
1	$\boxed{6}$ 60	$\boxed{11}$ 10	$\boxed{10}$	$\boxed{0}$	70
2	$\boxed{7}$	$\boxed{8}$ 40	$\boxed{4}$ 10	$\boxed{0}$ 10	60
3	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$	$\boxed{0}$ 20	20
Demand	60	50	10	30	

أي أن الكلفة الكلية تكون مساوية الى :

$$z = 6(60) + 11(10) + 8(40) + 4(10) + 0(10) + 0(20) = 830$$

طريقة الكلفة الأقل

تعتبر هذه الطريقة أفضل من طريقة الركن الشمالي – الغربي ، حيث تعتمد في عملية توزيع الكميات المعروضة على الغايات على أساس أقل الكلف.

وخطوات الحل هي:

(1) إختيار الخلية التي تحتوي على أقل كلفة نقل.

(2) تخصيص قيمة للمتغير داخل هذه الخلية بمقارنة الطلب مع العرض وإختيار الأقل أو إختيار أحدهما في حالة التساوي.

(3) حذف الصف أو العمود (القيد) الذي يتحقق.

(4) تكرار الخطوات السابقة لحين تحقيق جميع القيود.

ملاحظة

في حالة تساوي الكلف عند البحث عن أقل كلفة فإنه يتم إختيار أيٍّ منهما.

مثال (1)

حل مشكلة النقل التالية بإستخدام طريقة الكلفة الأقل

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	7	3	10	22
2	4	6	2	24
3	5	9	1	14
Demand	18	22	20	

الحل

يمكن البدء بالحل لأن النموذج متوازن ، حيث نلاحظ أن:

$$\sum a_i = \sum b_j = 60$$

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 22	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$ 18	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 6	~~24~~ 18
3	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$ 14	14
Demand	18	22	~~20~~ 6	

نلاحظ أن الحل بدأ بالخلية صاحبة الكلفة الأقل وهي (1) وبدأنا بتحقيق القيود ومن ثم إنتلقنا لى الخلية الأخرى صاحبة الكلفة الأقل من الخلايا المتبقية وهي (2) وهكذا...

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	$\boxed{7}$	$\boxed{3}$ 22	$\boxed{10}$	22
2	$\boxed{4}$ 18	$\boxed{6}$	$\boxed{2}$ 6	24
3	$\boxed{5}$	$\boxed{9}$	$\boxed{1}$ 14	14
Demand	18	22	20	

وأن الكلفة الكلية ستكون:

$$z = 3(22) + 4(18) + 6(6) + 2(6) + 1(14) = 164$$

مثال (2)

حل مشكلة النقل التالية بإستخدام طريقة الكلفة الأقل

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	6	11	10	70
2	7	8	4	60
3	6	7	3	20
Demand	60	50	10	

نلاحظ ان النموذج غير متوازن ، حيث أن : $\sum a_i = 150 \quad \& \sum b_j = 120$

بالتالي نقوم بإضافة عمود وهمي تكون كلف النقل داخل خلاياه تساوي (صفر) والطلب عنده يساوي:

$$\sum a_i - \sum b_j = 150 - 120 = 30$$

Destinations / Sources	1	2	3	4	Supply
1	6	11	10	0	70
2	7	8	4	0	60
3	6	7	3	0	20
Demand	60	50	10	30	

الآن يمكن البدء بعملية الحل:

Sources \ Destinations	1	2	3	4	Supply
1	6 / 60	11 / 10	10	0	~~70~~ 10
2	7	8 / 40	4 / 10	0 / 10	~~60~~ ~~50~~ 40
3	6	7	3	0 / 20	20
Demand	60	~~50~~ 40	10	~~30~~ 10	

وأن الكلفة الكلية ستكون:

$$z = 6(60) + 11(10) + 8(40) + 4(10) + 0(10) + 0(20) = 830$$

طريقة فوجل

إن خطوات الحل وفق هذه الطريقة تكون كالآتي:

(1) إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود.

(2) إختيار الصف أو العمود المناظر لأكبر فرق ناتج من الخطوة الأولى أعلاه (أو أحدهما في حالة المساواة).

(3) تحديد الخلية ذات الكلفة الاقل في الصف أو العمود الذي تم إختياره في الخطوة الثانية أعلاه (أو أحدهما في حالة المساواة).

(4) تخصيص قيمة للمتغير في الخلية المحددة في الخطوة الثالثة أعلاه وذلك بمقارنة العرض مع الطلب وإختيار الأقل (أو أحدهما في حالة المساواة). وبعدها يتم حذف الصف أو العمود الذي يتحقق.

(5) تكرار الخطوات أعلاه لحين تحقيق جميع الصفوف والأعمدة.

مثال (1)

حل مشكلة النقل التالية بإستخدام طريقة فوجل

Destinations / Sources	1	2	3	Supply
1	4	5	3	20
2	2	6	3	30
3	16	12	1	60
Demand	10	40	60	

الحل

نلاحظ ان النموذج متوازن ، حيث أن :

$$\sum a_i = \sum b_j = 110$$

	10	20 ~~40~~	60					
20	$\boxed{4}$	$\boxed{5}$ 20	$\boxed{3}$	1	1	5	5	x
20 ~~30~~	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{3}$	1	4	6	x	x
60	$\boxed{16}$	$\boxed{12}$	$\boxed{1}$ 60	11	x	x	x	x
	2	1	2					
	2	1	x					
	x	1	x					
	x	5	x					
	x	x	x					

وبذلك تكون الكلفة الكلية كالآتي :

$$z = 5(20) + 2(10) + 6(20) + 1(60) = 300$$

<u>مثال (2)</u>

حل مشكلة النقل التالية بإستخدام طريقة فوجل

Sources \ Destinations	1	2	3	4	Supply
1	2	4	3	7	3
2	8	1	10	6	7
3	9	3	15	2	5
Demand	4	3	4	4	

نلاحظ ان النموذج متوازن ، حيث أن : $\sum a_i = \sum b_j = 15$

	3 ~~4~~	3	1 ~~4~~	4							
3	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$ 3	$\boxed{7}$	1	x	x	x	x	x	x
3 6 ~~7~~	$\boxed{8}$ 3	$\boxed{1}$ 3	$\boxed{10}$ 1	$\boxed{6}$	5	5	5	2	8	8	x
15	$\boxed{9}$ 1	$\boxed{3}$	$\boxed{15}$	$\boxed{2}$ 4	1	1	1	7	9	x	x
	6	2	7	4							
	1	2	5	4							
	1	2	x	4							
	1	x	x	4							
	1	x	x	x							
	8	x	x	x							
	x	x	x	x							

وبذلك تكون الكلفة الكلية كالآتي :

$$z = 3(3) + 8(3) + 1(3) + 10(1) + 9(1) + 2(4) = 63$$