الفصل الثاني

الدفعات المتساوية المنتظمة بفائدة بسيطة

المقدمة :

تسمى المبالغ التي تدفع على فترات منتظمة بالدفعات الدورية . فاذا كانت الدفعات متساوية سميت الدفعات الدورية المتساوية . مثل (المبالغ التي يودعها او يستثمرها الافراد في المصارف وصناديق التوفير وتكون متساوية) . تعتبر الدفعات المتساوية التي يدفعها المدين دوريا لتسديد دينه من قبيل الدفعات الدورية المتساوية . ففي تطبيقات الفائدة البسيطة تكون هذه الدفعات عن مدد قصيرة تقل عن السنة . اما اذا زادت مددها عن السنة فتستخدم الفائدة المركبة . ويسمي البعض الدفعة التي تودع او تدفع اول كل فترة زمنية بدفعات الاستثمار ، والدفعات التي تدفع في نهاية كل فترة زمنية بدفعات السداد .

الدفعات الدورية المتساوية : هي مبالغ تدفع او تستلم من قبل المستثمر وتتصف بالاتي :

1. دورية أي ان الفترات بين كل مبلغ وآخر تكون متساوية .
2. متساوية أي ان المبلغ متساوي في كل دفعة .
3. تعتمد جميعها معدل فائدة موحد .

أولا : عناصر الدفعات : تتكون عناصر الدفعات من :

- مبلغ الدفعة : هو المبلغ المتساوي الذي يدفع او يستلم من فترة الى أخرى ويرمز له بالرمز (م) .
- معدل الفائدة : هو المعدل الذي يعتمد في جميع الدفعات ويرمز له بـ(ع) .
- مدة الدفعات : هي المدة الكلية ، وهي المدة المحصورة بين بداية الدفعة الأولى ونهاية الدفعة الأخيرة ، ويرمز لها بالرمز (ن) .
- مدة الدفعة : هي المدة الجزئية ، وهي المدة المحصورة بين دفعة ودفعة أخرى ، وتكون ثابتة ويرمز لها بالرمز (ن*)

ثانيا : مجموع فوائد الدفعات المتساوية :

لحسابها يتم اعتماد الصيغة الاتية :

مجموع فوائد الدفعات = المبلغ × معدل الفائدة × عدد الدفعات \ 2 × (مدة الدفعة الأولى + مدة الدفعة الأخيرة)

مج ف = م × ع × د \ 2 × (ن1 + ن د)

حيث ان : مج ف : مجموع فوائد الدفعات ، م : المبلغ ، ع : معدل الفائدة ، د : عدد الدفعات ،

ن 1 : مدة الدفعة الأولى ، ن د : مدة الدفعة الأخيرة .

كذلك فان : **د = ن \ ن***

مثال : احسب الفوائد التي تتحقق جراء استثمار مبلغ بدفعات دورية متساوية مبلغ الواحدة منها (5) مليون دينار ، تدفع كل ثلاثة اشهر ولمدة سنتين ، علما ان معدل الفائدة المعتمد هو (6 %) سنويا ؟

الحل : عدد الدفعات $= \frac{\text{الزمن الكلي}}{\text{الزمن الجزئي}} = \frac{\text{الزمن الكلي}}{\text{زمن الدفعة}} = \frac{24}{3}$ **= 8 عدد الدفعات .**

مج ف = م × ع × د \2 × (ن 1 + ن د)

= 5000000 × 100\6 × 2\8 × (12\3 + 12\24)

= 300000 × 4 × 12\27

= 300000 × 3\27 = 2700000 دينار .

مثال : يودع شخص مبلغ (1200000) دينار في بداية كل شهرين بمعدل فائدة (4%) سنويا ، ماهو مجموع الفوائد المتحققة له في نهاية 20 شهر ؟

الحل : **د = ن \ ن*** = 20 \ 2 = 10 دفعات

مج ف = م × ع × د \ 2 × (ن ١ + ن د)

= 1200000 × 0.04 × 2\10 × (12\2 + 12\20)

= 1200000 × 0.2 × 12\22

= 240000 × 12\22 = 440000 دينار .

ثالثا : أنواع الدفعات :

1. **الدفعة الفورية** : هي الدفعة التي يكون تاريخ دفعها في بداية الفترة ، أي في بداية مدة الدفعة وتعتمد :
   - مدة الدفعة الأولى = ن1
   - مدة الدفعة الأخيرة = ن*

مثال : اودع شخص مبلغ (1) مليون دينار في بداية كل شهرين ولمدة سنة كاملة بمعدل فائدة (7%) سنويا ، ما هو الرصيد المتحقق له في نهاية المدة ؟

عدد الدفعات (د) = $\frac{\text{الزمن الكلي(ن)}}{\text{زمن الدفعة(ن*)}}$

= 12 \ 2 = 6 دفعات .

جد = (م × د) + م × ع × د \2 (ن1 + ن د)

= (1000000 × 6) + 1000000 × 0.07 × 2\6 (12\2 + 12\12)

= 6000000 + 210000 (12\14)

= 6000000 + 245000 = 6245000 دينار . الرصيد المتحقق في نهاية المدة .

مثال : احسب الفوائد المتحققة لشخص بعد ايداعه مبلغ (9) مليون دينار في بداية كل شهر ولمدة سنة ونصف بمعدل فائدة (9%) سنويا ؟

الحل : د = 18 دفعة .

مج ف = م × ع × د\2 × (ن1 + ن د)

= 9000000 × 0.09 × 2\18 × (18\12 + 1\12)

= 1.583 × 9 × 810000

= 11542500 دينار . الفوائد المتحققة جراء الإيداع .

2. **الدفعة العادية** : هي الدفعة التي يكون تاريخ دفعها في نهاية الفترة (في نهاية مدة الدفعة)

مدة الدفعة الأولى = مدة الدفعات الكلية – مدة الدفعة الواحدة

ن1 = ن – ن*

مدة الدفعة الأخيرة = صفر

ن د = صفر .

مثال : احسب رصيد شخص من دفعة دورية متساوية بمبلغ (1200000) دينار تدفع في نهاية كل ثلاثة اشهر لمدة سنة ، اذا علمت ان معدل الفائدة المعتمد هو (6%) سنويا .

الحل : ن1 = ن – ن* = 12 – 3 = 9 شهر .

ن د = صفر .

د = 12 \ 3 = 4 دفعات .

جد = (م × د) + م × ع × د \2 (ن1 + ن د)

= (4 × 1200000) + 1200000 × 0.06 × 4\2 (9\12 + صفر)

= 4800000 + 144000 (9\12)

= 4800000 + 108000

= 4908000 دينار . رصيد الشخص .

مثال : ما هي الفوائد المتحققة لشخص بعد ايداعه مبلغ (9) مليون دينار نهاية كل شهرين لمدة سنة بمعدل فائدة 9% سنويا ؟

الحل : د = ن \ ن* = 12 \ 2 = 6 دفعات .

ن1 = ن – ن*

= 12 – 2 = 10 شهر ، ن د = صفر

مج ف = م × ع × د\2 × (ن1 + ن د)

= 9000000 × 0.09 × 2\6 (12\10 + صفر)

= 810000 × 2\6 × 12\10

= 8100000 \ 4 = 2025000 دينار مجموع الفوائد .

3. **الدفعة المتقطعة** : هي الدفعة التي تظهر عندما تتوقف واحدة من الدفعات السابقة ، وتبقى عملية استثمارها او حساب فائدتها فتظهر هناك فترة لاحقة ما بين تاريخ الانتهاء للدفعة الأخيرة وتاريخ حساب الفائدة ، فتسمى هذه الفترة بفترة الانقطاع ويرمز لها (ط) .

(تضاف مدة الانقطاع الى كل من مدة الدفعة الأولى ، ومدة الدفعة الأخيرة ، وبحسب نوع الدفعة)

مثال : اوجد مجموع الفوائد المتحققة بعد أربعة اشهر من انتهاء المدة المتفق عليها ، عند إيداع شخص مبلغ (900000) دينار في بداية كل شهر ولمدة سنة وثلاثة اشهر ، بمعدل فائدة (9%) سنويا .

الحل : ط = 4 شهر .

د = ن \ ن* = 15 \ 1 = 15 دفعة

ن1 = ن + ط = 15 + 4 = 19 شهر

ن د = ن* + ط = 1 + 4 = 5 شهر

مج ف = م × ع × د\2 × (ن1 + ن د)

= 900000 × 0.09 × 2\15 (12\19 + 12\5)

= 607500 × 12\24 = 1215000 دينار .

مثال : اوجد رصيد شخص بعد خمسة اشهر من انتهاء المدة المتفق عليها لدفعة دورية متساوية بمبلغ (120000) دينار تدفع في نهاية كل ثلاثة اشهر لمدة سنتين ، بمعدل فائدة قدره (6%) سنويا .

الحل : ن1 = (ن – ن*) + ط = (24 – 3) + 5 = 21 + 5 = 26 شهر .

ن د = 0 + ط = 5 شهر .

د = ن \ ن* = 24 \ 3 = 8 دفعات .

جد = (م × د) + م × ع × د \2 (ن1 + ن د)

= (120000 × 8) + 120000 × 0.06 × 2\8 (12\5 + 12\26)

= 960000 + 28800 × 12 \ 31 = 960000 + 74400 = 1034400 دينار .

رابعا : بعض الحالات عن الدفعات

1. عندما يكون مبلغ الدفعة مجهولا

مثال : يودع شخص مبلغ معين لدى مصرف ، في نهاية كل شهرين ولمدة عام كامل بمعدل فائدة (12%) سنويا .

فاذا علمت ان رصيده في نهاية المدة كان (157500) دينار ، فكم كان يودع كل شهر لدى المصرف ؟

الحل : د = ن \ ن* = 12 \ 2 = 6 دفعات .

ن 1 = ن – ن* = 12 – 2 = 10 شهر .

ن د = صفر .

جد = (م × د) + م × ع × د \2 (ن1 + ن د)

157500 = (م × 6) + م × 0.12 × 2\6 (12\10 + صفر)

157500 = 6 م + 0.3 م

157500 = 6.3 م ← م = 157500 \ 6.3 = 25000 دينار .

2. عندما يكون معدل الفائدة مجهولا

مثال : ما هو معدل الفائدة المعتمد لدى مصرف ، اذا علمت انه يدفع الى شخص فوائد بمقدار (17500) دينار ، عن إيداع هذا الشخص مبلغ (500000) دينار في بداية كل ثلاثة اشهر ولمدة سنتين ؟

الحل : د = ن \ ن* = 24 \ 3 = 8 دفعات .

ن1 = ن = 24 شهر .

ن د = ن* = 3 شهر .

مج ف = م × ع × د\2 × (ن1 + ن د)

17500 = 500000 × ع \ 100 × 8 \ 2 (24 \ 12 + 3 \ 12)

17500 = 20000 ع × 27 \ 12

17500 = 45000 ع

ع = 17500 \ 45000 = 0.04 تقريبا = 4% .

خامسا : جملة دفعة دورية متساوية :

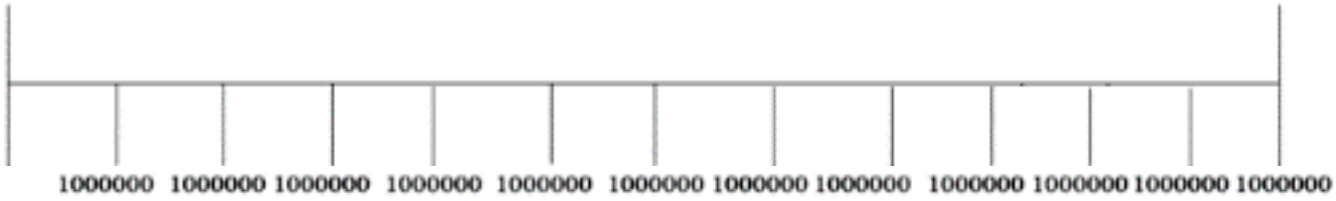
لغرض إيجاد دفعات دورية متساوية نحسب جملة كل دفعة للمدة بين تأريخ ايداعها وتأريخ الاستحقاق ، ثم نجمع هذه الجمل لتكون جملة الدفعات .

مثال : يودع شخص في مصرف في اول كل شهر مبلغ (1000000) دينار .

م / معرفة الجملة الناتجة في نهاية سنة كاملة اذا حسبت الفائدة البسيطة بمعدل 3% سنويا .

الحل : الرسم البياني يوضح لنا المدد الزمنية بين الإيداع وبين تواريخ الاستحقاق :

تأريخ البدء تأريخ الانتهاء



الخط البياني يمثل سنة كاملة وكل فاصل منه تمثل شهرا واحدا . فالمبلغ الأول يودع سنة كاملة والمبلغ الثاني يودع (11) شهرا . والمبلغ الثالث يودع (10) اشهر ، والرابع يودع (9) اشهر ..... وهكذا . فان المبلغ (12) يودع لمدة شهرا واحدا ولإيجاد جملة الدفعات نحسب جملة كل دفعة على حدة ثم نجمعها مع البقية .

الجملة = الدفعة + فائدتها من تاريخ ايداعها الى يوم الاستحقاق .

اذن الدفعات =

$$+\left(\frac{11}{12}\times\frac{3}{100}\times 1000000+1000000\right)+\left(\frac{12}{12}\times\frac{3}{100}\times 1000000+1000000\right)$$

$$\left(\frac{1}{12}\times\frac{3}{100}\times 1000000+1000000\right)+\ldots\ldots+\left(\frac{10}{12}\times\frac{3}{100}\times 1000000+1000000\right)$$

$$\left(1+\ldots\ldots+10+11+12\right)\frac{1}{12}\times\frac{3}{100}\times 1000000+\left(1000000\times 12\right)=$$

$$\left(78\right)\ \frac{1}{12}\times\frac{3}{100}\times 1000000+12000000=$$

$$\frac{780000}{4}+12000000=$$

$$=12000000+195000=12195000 \text{ دينار .}$$

يمكن اعتماد القانون الاتي في حساب جملة الدفعات :

(جملة الدفعات = مجموع الدفعات + الدفعة × المعدل × $\frac{1}{12}$ (مجموع المدد بالاشهر))

او

(جملة الدفعات = مجموع الدفعات + الدفعة × المعدل × $\frac{1}{360}$ (مجموع المدد بالايام)) .

مثال : يودع شخص في صندوق التوفير 400000 دينار في نهاية كل شهرين بفائدة بسيطة بمعدل 3% سنويا.

م/ ما هي جملة ما يتجمع له في صندوق التوفير في نهاية سنة كاملة ؟

الحل : جملة الدفعات = مجموع الدفعات + الدفعة × المعدل × $\frac{1}{12}$ (مجموع المدد بالاشهر)

$$= 400000 \times 6 + 400000 \times \frac{3}{100} \times \frac{1}{12} (0+ 2 + 4 + 6 + 8 + 10)$$

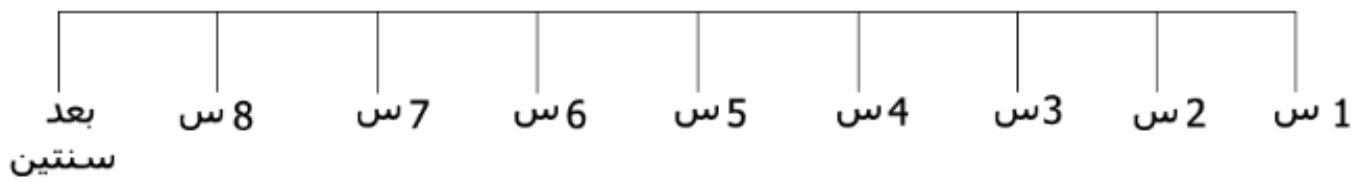
$$= 2400000 + 1000 (30)$$

= 2430000 دينار .

مثال : يريد شخص الحصول على مبلغ (300) الف دينار بعد مرور سنتين . فما هو المبلغ المتساوي الذي يودعه في اول كل ربع سنة بفائدة بسيطة معدلها 4% ليحصل على هذا المبلغ ؟

الحل : توجد ثمان دفعات متساوية يجب ان يودعها المستثمر بفائدة لكي يحصل على جملة مقدارها (300) الف دينار.

نفرض ان المبلغ المتساوي (س) . فيكون كما في الرسم البياني بحيث كل ارقام الـ(س) متساوية .



$$300000 = 8\ (\text{س}) + \text{س} \times \frac{4}{100} \times \frac{1}{12}\ (3+6+9+12+15+18+21+24)$$

$$300000 = 8\ \text{س} + \frac{\text{س}}{300}\ (\frac{8}{2}\ (24 + 3))$$

$$300000 = 8\ \text{س} + \frac{\text{س}}{300}\ (108)$$

$$300000 = 8\ \text{س} + 0.36\ \text{س}$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{300000}{8.36} = 35885 \text{ دينار تقريبا .}$$

مثال : بلغت جملة دفعة دورية متساوية قدرها (20) الف دينار ، تودع في نهاية كل (40) يوما لمدة سنة كاملة (184000) دينار ، فما هو المعدل السنوي الذي حسبت به الفائدة ؟

الحل : نفرض ان المعدل السنوي (ع) :

$$\text{مجموع الدفعات} = \frac{360}{40} = 9 \text{ دفعات .}$$

الجملة = مجموع الدفعات + فوائدها

$$184000 = 9 \times 20000 + 20000 \times \text{ع} \times \frac{1}{360}\ (320 + 280 + ... + \text{صفر})$$

$$184000 = 180000 + \frac{20000}{360}\ \text{ع}\ (\frac{9}{2}\ (320 + \text{صفر}))$$

$$184000 = 180000 + \frac{2000}{36}\ \text{ع}\ (\frac{320 \times 9}{2})$$

$$4000 = \frac{1000\ \text{ع}}{18}\ (\frac{2880}{2}) \leftarrow 4000 = \frac{1000\ \text{ع}}{18}\ (1440)$$

$$4000 = 80000\ \text{ع} \leftarrow \text{ع} = 4000 \setminus 80000$$

$$\text{ع} = 0.05 = 5\ \%$$

ويمكن حساب جملة الدفعات الدورية المتساوية بالطريقة الاتية :

جملة الدفعات = مجموع المبالغ + مجموع الفوائد

جد = (م × د) + م × ع × د\2 (ن ١ + ن د)

مثال : ما هو رصيد شخص بعد سنتين جراء استثمار دفعات دورية متساوية مبلغ الدفعة فيها (3) مليون دينار ، تودع بمصرف في بداية كل شهرين بمعدل فائدة 8% سنويا .

الحل : د = ن \ ن* = 24 \ 2 = 12 دفعة .

(الجملة) جد = (م × د) + م × ع × د\2 (ن ١ + ن د)

= (12 × 3000000) + 12\2 × 0.08 × 3000000 (12\2 + 12\24)

= 36000000 + 6 × 240000 (12\26)

= 36000000 + 3120000 = 39120000 دينار . جملة الدفعات في نهاية السنتين .

مثال : شخص يودع مبلغ (8000000) دينار في بداية كل ثلاثة اشهر بمصرف بمعدل فائدة (4%) سنويا ، ما هو الرصيد الذي سيحصل عليه بعد مرور (15) شهر ؟

الحل : د = ن \ ن* = 15 \ 3 = 5 دفعات .

(الجملة) جد = (م × د) + م × ع × د\2 (ن ١ + ن د)

= (5 × 8000000) + 5\2 × 0.04 × 8000000 (12\3 + 12\15)

= 40000000 + 2\5 × 320000 (12\18)

= 40000000 + 1200000 = 41200000 دينار .