الفصل الثاني

البرمجة الخطية

الفصل الثاني

البرمجة الخطية (Linear Programming)

مفهوم البرمجة الخطية وأهميتها

تسعى البرمجة الخطية لإيجاد أفضل الإستعمالات للموارد المتاحة (التي تتصف بأنها محدودة كالمواد الأولية، الأيدي العاملة، المعدات، رأس المال،...الخ) بهدف إيجاد التوليفة المناسبة من تلك الموارد بما يحقق هدفا معينا (تعظيم الربح أو تقليل الكلفة) ويتم ذللك من خلال توظيف إسلوب رياضي معين. إذن يمكن القول أن البرمجة الخطية هي أداة رياضية تساعد على إتخاذ قرارات تتعلق بإستخدام الموارد المتاحة بهدف الوصول الى أعلى ربح أو أقل كلفة.

كما يمكن أن تعرف البرمجة الخطية على انها أحد النماذج الرياضية التي تعالج التخصيص الأمثل للموارد المحدودة بغية الحصول على حل أمثل من خلال بناء نموذج رياضي يكون قابلا للحل بأحد الأساليب الرياضية.

إن أهمية البرمجة الخطية تتمثل في كونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الأنظمة وهي أسهل وأبسط أنواع النماذج الرياضية التي يمكن إنشاؤها لمعالجة مشاكل القطاعات الصناعية والخدمية ذات الصلة بإتخاذ القرار الإداري.

بناء نموذج البرمجة الخطية

وهي أهم مراحل البرمجة الخطية، إذ أن إنشاء نموذج صحيح ومتكامل سوف يؤدي الى الوصول للحل الصحيح. ويمكن تلخيص خطوات بناء النموذج البرمجة الخطية بما يأتي:

1- تعريف المتغيرات

ويقصد بالمتغيرات هنا متغيرات القرار أو المدخلات التي يمكن السيطرة عليها أو التحكم بها. ومن الأمثلة على متغيرات القرار هي: عدد الأطنان المنتجة من الطّحين أو عدد براميل النفط المنتجة في إحدى الدول وهكذا. ويرمز لمتغيرات القرار بالرمز x_j.

2- صياغة دالة الهدف

وتمثل الهدف الذي تسعى الإدارة لتحقيقه. ودالة الهدف في نموذج البرمجة الخطية إما تكون دالة تعظيم maximum أو تخفيض minimum ويرمز لدالة الهدف بالرمز z كما يشار إلى مساهمة كل متغير في دالة الهدف بالحرف c_j .

3- تحديد القيود

وتمثل مجموعة الموارد في المشكلة ويرمز لها بالرمز b_i. والموارد في البرمجة الخطية عادة ماتكون محدودة بحيث تتنافس في إستغلالها متغيرات المشكلة حسب مقادير معينة يرمز لها بالرمز a_{ij} .

4- قيد عدم السالبية

ويشير هذا القيد إلى أن المتغيرات لا تأخذ قيمة سالبة.

وتكتب الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية بشكل مختصر كما يلي:

Min or Max $Z= \sum_{j=1}^{n} c_j \, x_j$

S.to

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_j \ \leq = \geq \ b_i \quad i = 1,2,\dots,m$

$x_j \geq 0$

حيث أن:

Z هي دالة الهدف (دالة ربح، دالة كلفة أو دالة إنتاج).

c_j يمثل مساهمة x_j في دالة الهدف وقد يمثل (سعر وحدة واحدة، هامش ربح وحدة واحدة أو تكلفة إنتاج وحدة واحدة).

x_j متغير القرار الذي يراد معرفة قيمته والذي يجب أن يكون كمية غير سالبة لأنه قد يمثل عدد الوحدات المنتجة مثلا.

a_{ij} أجزاء من كميات الموارد المحدودة التي يتطلبها المتغير.

b_i كميات الموارد المتاحة (أيدي عاملة، مواد خام، ساعات عمل،...الخ)

مثال (1)

تنتج شركة نوعين من المنتجات الكهربائية هما A و B. يمر كلا النوعين بقسمي التصنيع والتجميع. وتوضح البيانات المتوفرة لدى الشركة أن:

1- طاقة قسم التصنيع هي (1500) ساعة عمل ويحتاج كل مقياس من النوع A الى (3) ساعات عمل ويحتاج كل مقياس من النوع B الى (2) ساعة عمل.

2- بينما تبلغ طاقة قسم التجميع (1000) ساعة عمل ويحتاج كل مقياس من النوع A الى (1) ساعة عمل ويحتاج كل مقياس من النوع B الى (4) ساعة عمل.

وتحقق الشركة ربحاً للوحدة الواحدة قدره (15) دولار من النوع A و (18) دولار من النوع B.

المطلوب: صياغة نموذج برمجة خطية للمشكلة أعلاه.

الحل:

يتطلب الامر انتاج النوعين خلال الوقت المتاح للعمليتين الاولى والثانية من اجل ان نحصل على اقصى ربح ممكن.

لذلك نقوم بالاتي من أجل صياغة نموذج برمجة خطية للمسألة أعلاه

<u>اولاً : تعريف المتغيرات</u>

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من A :- X_1

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من B :- X_2

<u>ثانياً : دالة الهدف</u>

إن هدف المشكلة هو تعظيم الأرباح لذا ستكون دالة الهدف من نوع التعظيم Max وتصاغ كالاتي:

$$MaxZ = 15X_1 + 18X_2$$

حيث أن 15 تمثل ربح الوحدة الواحدة من A وأن 18 تمثل ربح الوحدة الواحدة من B.

<u>ثالثاً : القيود</u>

القيد الاول (قيد العملية الاولى التصنيع): إن أقصى زمن متاح للعملية في قسم التصنيع هو 1500 ساعة عمل. وحيث أن الوحدة الواحدة من المنتج الاول (A) تحتاج الى تصنيعها الى 3 ساعات بينما الوحدة الواحدة من المنتج الثاني (B) الى 2 ساعة، فإنه يمكن صياغة القيد الاول كما يلي:

$$3X_1 + 2X_2 \leq 1500$$

القيد الثاني (قيد العملية الثانية التجميع): إن أقصى زمن متاح للعملية في قسم التجميع تحتاج الى 1000 ساعة عمل. وحيث ان الوحدة الواحدة من المنتج الاول (A) تحتاج الى تصنيعها الى 1 ساعة بينما الوحدة الواحدة من المنتج الثاني (B) الى 4 ساعات ، وبالتالي يمكن صياغة القيد الثاني كما يلي:

$$X_1 + 4X_2 \leq 1000$$

رابعاً : قيد عدم السالبية

إن قيم المتغيرات التي تم افتراضها أعلاه لايمكن أن يكون سالب، أي أن الوحدات المنتجة أما تأخذ قيمة موجبة (تنتج بمقدار معين) أو صفر (لا تنتج نهائياً). ويتم التعبير عن ذلك بما يسمى بقيد عدم السالبية وكما يلي:

$$X_1, X_2 \geq 0$$

وبذلك يمكن كتابة نموذج البرمجة الخطية بصورة كاملة وكما يلي:

$$\begin{aligned}
&MaxZ = 15X_1 + 18X_2 \\
&S\ to \\
&3X_1 + 2X_2 \leq 1500 \\
&X_1 + 4X_2 \leq 1000 \\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

مثال (2)

تقوم إحدى الشركات بإنتاج نوعين من الأسمدة (A,B) علما أن الشركة تحتاج الى 20 ساعـــة لإنتاج طـن واحد من النوع A ، و30 ساعة لإنتاج طـن واحـد من النوع B. وأن الوقت المتاح سنويا للإنتاج هو 1200 ساعة. كما إن الطلبات على هــذين المنتوجين لا يزيد على 40 طن من A سنويا ، ولا يزيد عن 30 طن من B سنوياً. ان تكلفة إنتاج الطن الواحد من A هو 10000 دينار، و تكلفة إنتاج الطن الواحد من B هو 15000 دينار.

المطلوب : صياغة المشكلة بصيغة برمجة خطية لتقليل التكاليف.

الحل :

بإتباع نفس الاسلوب في المثال السابق يمكن صياغة نموذج برمجة خطية وكالاتي:

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من A :- X_1

نفرض ان عدد الوحدات التي يتم انتاجها من B :- X_2

$$
\begin{aligned}
&Min Z = 10000X_1 + 15000X_2 \\
&S\ to \\
&20X_1 + 30X_2 \le 1200 \\
&X_1 \le 40 \\
&X_2 \le 30 \\
&X_1, X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

مثال (3)

تنتج شركة ثلاثة أنواع من السلع (C,B,A) ويحتاج كل نوع من السلع إلى نوعين من المواد الأولية والجدول التالي يبين ماتحتاجه كل سلعة من هذه المواد (بالكغم) علما أن هامش الربح المتحقق عن بيع السلع C,B,A بالدينار على التوالي هو 1000 و 1500 و 2000.

سلعة / مادة أولية	A	B	C	الكمية المتوفرة من كل مادة (كغم)
المادة I	2	4	3	750
المادة II	1	3	2	600

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة لتعظيم هامش الربح.

الحل

1- تعريف المتغيرات

نفترض أن عدد الوحدات المنتجة من السلعة A = x_1

نفترض أن عدد الوحدات المنتجة من السلعة B = x_2

نفترض أن عدد الوحدات المنتجة من السلعة C = x_3

2- دالة الهدف

إن هدف المشكلة هو تعظيم الأرباح لذا ستكون دالة الهدف من نوع التعظيم Max وتصاغ كالاتي:

$$Max\ Z = 1000\ x_1 + 1500\ x_2 + 2000\ x_3$$

ملاحظة

- تعظيم أرباح تعني الدالة max
- نبحث عن ربح كل سلعة ونضعها في دالة الهدف 2000 & 1500 ,1000

3- القيود

اما قيود المشكلة وحسب مامتوافر من الموارد الأولية فتكون بالشكل:

$$2\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 \leq 750$$

$$x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \leq 600$$

ملاحظة

أقل أو يساوي (≤) لانه ذكر في الجدول الكمية المتوفرة لذلك لا يمكن التجاوز على هذه الكميات ووضع أكبر أو يساوي.

4- قيد عدم السالبية

وهو القيد الأخيرويسمى بقيد إشارة المتغيرات التي نلاحظ أنها تكون غير سالبة ويكتب هذا القيد كما يلي:

$$x_1, x_2,\ x_3 \geq 0$$

وبذلك يكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$Max\ Z = 1000\,x_1 + 1500\,x_2 + 2000\,x_3$

S.to

$2\,x_1 + 4\,x_2 + 3\,x_3 \leq 750$

$x_1 + 3\,x_2 + 2\,x_3 \leq 600$

$x_1, x_2,\ x_3 \geq 0$

مثال (4)

تقوم إحدى مصانع النجارة بإنتاج كراسي ومناضد وعملية الإنتاج هذه تمر بثلاثة أقسام. الجدول أدناه يوضح ماتحتاجه كل وحدة من الكراسي والمناضد من ساعات العمل في كل قسم وكذلك يضم كلفة إنتاج الوحدة الواحدة:

منتج / قسم	كرسي	منضدة	وقت الإنتاج (دقايق) على أقل تقدير
القسم الاول	4	1.5	12
القسم الثاني	5	3	25
القسم الثالث	3.2	6	14
كلفة إنتاج الوحدة الواحدة (دولار)	15	9	

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة لتقليل التكاليف.

الحل

1- تعريف المتغيرات

نفترض أن عدد الوحدات المنتجة من الكراسي $= x_1$

نفترض أن عدد الوحدات المنتجة من المناضد $= x_2$

2- دالة الهدف

إن هدف المشكلة هو تقليل التكاليف لذا ستكون دالة الهدف من نوع التصغير Min وتصاغ كالاتي:

$$Min\, Z = 15\, x_1 + 9\, x_2$$

ملاحظة

- تقليل تكاليف تعني الدالة min
- نبحث عن كلفة كل سلعة ونضعها في دالة الهدف 9 & 15

3- القيود

إما قيود المشكلة وحسب مامتوافر من الموارد الأولية فتكون بالشكل:

$$4\ x_1 + 1.5\ x_2 \geq 12$$

$$5x_1 + 3\ x_2 \geq 25$$

$$3.2x_1 + 6\ x_2 \geq 14$$

ملاحظة

أكبر أو يساوي (≥) لانه ذكر في الجدول أقل وقت للإنتاج.

وهو القيد الأخيرويسمى بقيد إشارة المتغيرات التي نلاحظ أنها تكون غير سالبة ويكتب هذا القيد كما يلي:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

وبذلك يكون نموذج البرمجة الخطية كما يلي:

$Min\ Z = 15\ x_1 + 9\ x_2$

S.to

$4\ x_1 + 1.5\ x_2 \geq 12$

$5x_1 + 3\ x_2 \geq 25$

$3.2x_1 + 6\ x_2 \geq 14$

$x_1, x_2 \geq 0$

مثال (5) / للمناقشة والحل داخل المحاضرة

أستلمت الشركة العامة للصناعات البتروكيمياوية في البصرة طلباً للحصول على 1400 كغم من خليط حبيبات بلاستيكية والذي يتكون من ثلاث مركبات وبالمواصفات الآتية :

- يجب أن لا يحتوي الخليط على أكثر من 400 كغم من المركب الاول.
- يجب أن يحتوي الخليط على الاقل من200 كغم من المركب الثاني.
- يجب أن يحتوي الخليط على الاقل من 150 كغم من المركب الثالث.

وأن كلفة الكغم من المركب الاول والثاني والثالث هي 2 و 3 و 4 ألف دينار على التوالي.

المطلوب / صياغة نموذج البرمجة الخطية.

مثال (6) / للمناقشة والحل داخل المحاضرة

تنتج شركة لصناعة الاصباغ المحدودة نوعين من مواد الاصباغ A و B ، حددت الشركة أن انتاجها من النوعين يجب أن لا يقل عن 350 لتر ، كما أن طلب العميل من المادة الاولى يجب أن لايقل عن 125 لتر ، ويحتاج انتاج لتر من المادة A الى ساعتين ومن المادة B الى ثلاث ساعات ، وأن عدد ساعات الانتاج المتاحة الشهر القادم هي 600 ساعة فقط ، وأن كلفة انتاج اللتر الواحد من المادة A و B هو ألفين وثلاثة الاف دينار على التوالي.

المطلوب / صياغة نموذج البرمجة الخطية.

صيغ نماذج البرمجة الخطية

يمكن صياغة نموذج البرمجة الخطية بعدة أشكال (صيغ) وسوف يتم التطرق الى صيغتين وكما يلي:

الصيغة القانونية

تتميز هذه الصيغة بما يلي:

1- يجب أن تكون دالة الهدف من نوع Max.

2- يجب أن تكون جميع القيود من نوع أقل أو يساوي $\leq$.

ولكتابة نموذج البرمجة الخطية بالصيغة القانونية يجب إجراء التغييرات التالية:

أ- تحول دالة الهدف من Min إلى Max بضرب الدالة بـ (-1)

Example $(Min\ Z = 4x_1 + 2x_2) \times (-1)$

$$Max\ Z = -4x_1 - 2x_2$$

ب-تحول القيود الى النوع أقل أو يساوي $(\leq)$ بضربها بـ (-1)

Example $(x_1 + 3x_2 \geq 6) \times (-1)$

$$-x_1 - 3x_2 \leq -6$$

مثال (1)

إستخدم الطريقة القانونية لإعادة كتابة نموذج البرمجة الخطية الاتي:

Min Z= $3x_1 - 4x_2 - x_3$

S.to

$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 7$

$-5x_1 + 9x_2 \geq -2$

$x_j \geq 0$

الحل

لتحقيق شروط الصيغة القانونية، فإننا نحتاج الى تحويل دالة الهدف الى Max والقيد الثاني إلى أصغر أو يساوي. لذلك نقوم بالضرب بـ (1-) .

$Max\ Z = -3x_1 + 4x_2 + x_3$

S.to

$x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 7$

$5x_1 - 9x_2 \leq 2$

$x_j \geq 0$

الصيغة القياسية

تتميز هذه الصيغة بما يلي:

1- من الممكن أن تكون دالة الهدف من نوع Max أو Min.

2- يجب أن تكون جميع القيود من نوع مساواة (=). ولتحقيق هذا الشرط نقوم بإضافة متغير وهمي (S_i) في حالة القيود من النوع أقل أو يساوي $(\leq)$. أما في حالة القيود من النوع أكبر أو يساوي $(\geq)$ فيتم طرح متغير وهمي.

مثال (2)

إستخدم الطريقة القياسية لإعادة كتابة نموذج البرمجة الخطية الاتي:

$Max\ Z = 2x_1 + 7x_2$

S.to

$9x_1 + 3x_2 \leq 10$

$4x_1 + x_2 \geq 13$

$x_1 + x_2 = 26$

$x_j \geq 0$

الحل

لتحقيق شروط الصيغة القياسية، فإننا نحتاج الى تحويل جميع القيود الى حالة المساواة بإضافة أو طرح متغيرات وهمية وكما يلي:

$Max\ Z = 2x_1 + 7x_2$

S.to

$9x_1 + 3x_2 + S_1 = 10$

$4x_1 + x_2 - S_2 = 13$

$x_1 + x_2 = 26$

$x_j \geq 0$

أمثلة أخرى للتدريب

أعد صياغة نموذج البرمجة الخطية بإستخدام الصيغة القياسية والقانونية:

النموذج الأول

$$Min\ Z = 20\ x_1 + 39\ x_2 + 17\ x_3$$

$S.to$

$$2\ x_1 - 4\ x_3 \geq 19$$

$$5\ x_1 + 9\ x_2 \leq 24$$

$$-3\ x_1 - 6\ x_2 + 8\ x_3 \geq 30$$

$$x_j \geq 0$$

النموذج الثاني

$$Max\ Z = 97\ x_1 + 62\ x_2 + 83\ x_3$$

$S.to$

$$12\ x_1 - 26\ x_2 + 2\ x_3 \leq 7$$

$$3\ x_1 + 11\ x_2 - 6x_3 \geq 24$$

$$-13\ x_2 + 9\ x_3 \geq 30$$

$$x_j \geq 0$$

طرق حل نموذج البرمجة الخطية

يتم حل نماذج البرمجة الخطية من أجل إيجاد قيم المتغيرات القرارية x_j والتي تعظم أو تقلل قيمة دالة الهدف. وتوجد عدة طرق للحل نذكر منها:-

الطريقة البيانية Graphical Method

تعد الطريقة البيانية أو طريقة الرسم البياني وسيلة أولية لحل مشاكل البرمجة الخطية. وتستخدم إذا كان النموذج يحتوي على متغيرين فقط، إذ يتعذر رسم النموذج في حال إحتواءه على أكثر من متغيرين.

إن أساس عمل هذه الطريقة قائم على فكرة تمثيل القيود بمعادلة خط مستقيم ومن ثم تحديد منطقة الحلول الممكنة ثم اختيار النقطة التي تحقق أفضل قيمة لدالة الهدف.

خطوات الحل وفق الطريقة البيانية :

1. تحويل القيود من متباينات الى معادلات وذلك بتحويل إشارات ($\geq$ و $\leq$) الى أشارة (=) .
2. يتم تمثيل القيود بمستقيمات من خلال إستخراج نقاط تقاطع لكل قيد وكما يلي:
   a - في معادلة القيد الأول:
   نعوض قيمة المتغير الأول بالصفر لاستخراج قيمة المتغير الثاني ، ثم نعوض قيمة المتغير الثاني بالصفر لاستخراج قيمة المتغير الأول.
   b - في معادلة القيد الثاني:
   نكرر نفس الاجراءات المتبعة مع معادلة الأول.
   وبذلك نكون قد حصلنا على نقطتي تقاطع لكل قيد.
3. يرسم محورين أحداهما أفقي وليكن X_1والآخر عمودي وليكن X_2.
4. نرسم المستقيمات بإستخدام نقاط التقاطع المستخرجة في النقطة (2) ونحدد المنطقة المقبولة للحل (تحديد منطقة الحل) بالإعتماد على نوع القيود من حيث كونها (أكبر أو يساوي ، أصغر أو يساوي ، أو يساوي).

5. تحديد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية من خلال تعويض إحداثيات النقاط الواقعة على رؤوس منطقة الحل المقبول في دالة الهدف. وهنا توجد حالتان:
a – إذا كانت دالة الهدف من نوع max فإن إحداثيات النقطة التي تعطي أكبر قيمة لدالة الهدف تمثل الحل الأمثل.
b - إذا كانت دالة الهدف من نوع min فإن إحداثيات النقطة التي تعطي أقل قيمة لدالة الهدف تمثل الحل الأمثل.

ملاحظة مهمة جداً

عند تحديد منطقة الحل المقبول (النقطة 4 أعلاه) ، فإنه يتم العمل وفق الآتي:

- **علامة أكبر أو يساوي ($\geq$) تعني أن منطقة الحل على يمين أو أعلى الخط المستقيم .**
- **علامة أصغر أو يساوي ($\leq$) تعني أن منطقة الحل على يسار أو أسفل الخط المستقيم.**

وبذلك يمكن تلخيص خطوات الحل بالطريقة البيانية في:

1. رسم القيود
2. تحديد منطقة الحلول المقبولة
3. تحديد الحل الأمثل

مثال (1)

أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي بطريقة الرسم البياني:

$$\begin{aligned}
&Max\ Z = 40X_1 + 50X_2\\
&S.t:\\
&3X_1 + X_2 \leq 15\\
&X_1 + 2X_2 \leq 12\\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}$$

الحل

1- تحويل القيود الى معادلات

$$3X_1 + X_2 = 15 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$X_1 + 2X_2 = 12 \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

2- إستخراج نقاط التقاطع لكل قيد ومن ثم تمثيل القيود بخطوط مستقيمة

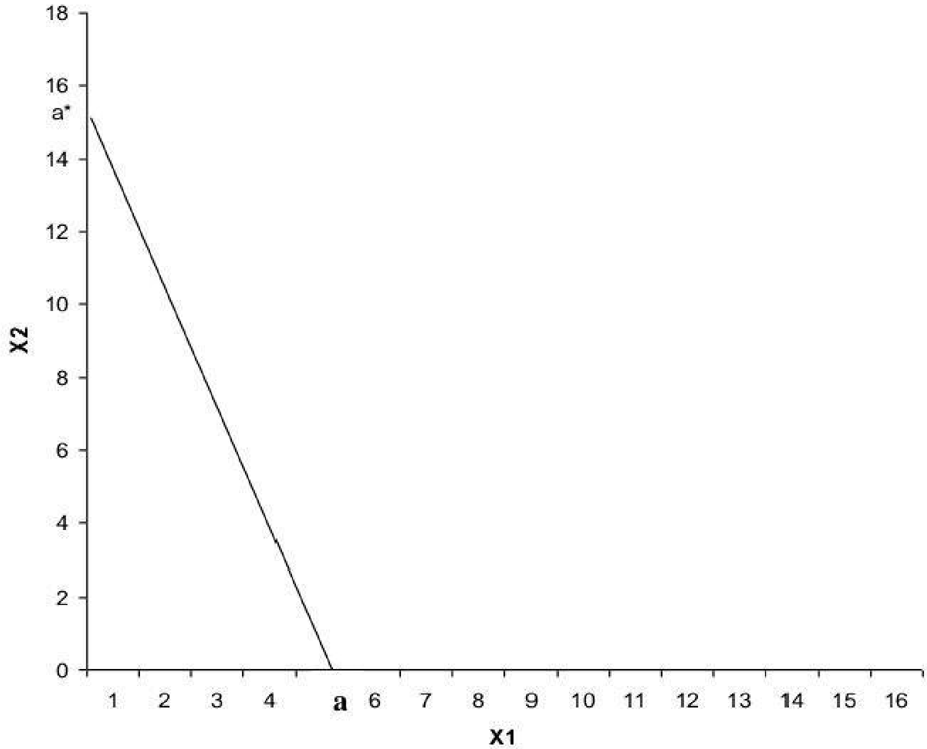
- معادلة القيد الأول :

$$3X_1 + X_2 = 15$$

عندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 15$
فنحصل على نقطة نطلق عليها *a وتكون إحداثياتها (0,15)

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 5$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها a وتكون إحداثياتها (5,0) .

وبذلك يتم رسم القيد بصورة المستقيم والذي يحدد بالنقاط (0,15) و (5,0) وكما يلي :



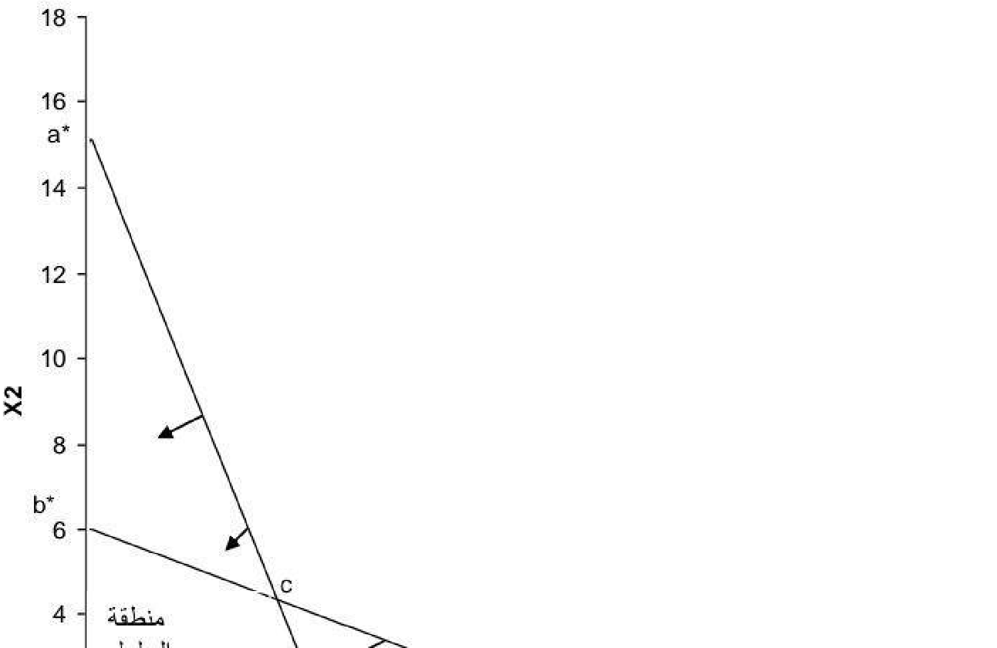
- معادلة القيد الثاني :

$$X_1 + 2X_2 = 12$$

وعندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 6$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها *b تكون إحداثياتها (0,6) .

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 12$
وبذلك نحصل على نقطة نطلق علها b وتكون إحداثياتها (12,0) .

وبذلك يتم رسم القيد الثاني بصورة مستقيم والذي يحدد بالنقاط (12,0) و (0,6) وعلى نفس الرسم السابق وكما يلي :



3- تحديد منطقة الحلول الممكنة حسب نوع القيد (كما ذكر في الملاحظة أعلاه)

وهنا نلاحظ أن منطقة الحلول المقبولة هي المحددة بالنقاط $0b^*ca$.

4- تحديد الحل الأمثل من خلال التعويض بدالة الهدف

يتم تعويض إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة $(0b^{*}ca)$ بدالة الهدف و هنا نلاحظ أن إحداثيات النقطة c فقط هي غير معروفة ، لذلك يتم إستخراجها بالحل الآني لمعادلات القيود المتقاطعة في تلك النقطة وكما يلي:

نقوم بحل المعادلتين (1) و(2) آنيا حيث نقوم بضرب المعادلة (2) بـ 3 وطرحها من المعادلة (1) وكما يلي:

$$3X_1 + X_2 = 15 \quad \text{..................(1)}$$
$$-3X_1 - 6X_2 = -36 \quad \text{..................(2)}$$

$$0 - 5X_2 = -21$$
$$X_2 = 4.2$$

وبتعويض قيمة X_2 في احدى المعادلتين أعلاه نحصل على: $X_1 = 3.6$

الان يمكن التعويض في دالة الهدف لتحديد الحل الأمثل وكما في أدناه:

النقطة	$\boldsymbol{X_1}$	$\boldsymbol{X_2}$	$Max\ Z = 40X_1 + 50X_2$
0	0	0	0
b*	0	6	300
c	3.6	4.2	**354**
a	5	0	200

وبما أن دالة الهدف من نوع max فإن إحداثيات النقطة c هي الحل الأمثل لانها حققت أكبر قيمة لدالة الهدف. وبذلك يكون $x_1=3.6$ و $x_2=4.2$.

مثال (2)

أستخدم الطريقة البيانية لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية أدناه:

$$MinZ = 40X_1 + 3X_2$$
$$S.to$$
$$2X_1 + 3X_2 \geq 12$$
$$X_1 + X_2 \geq 25$$
$$5X_1 + 3X_2 \geq 90$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

1- لرسم القيود الثلاث يتم تحويل القيود الى معادلات وكالآتي :

$$2X_1 + 3X_2 = 12 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$
$$X_1 + X_2 = 25 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$5X_1 + 3X_2 = 90 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

2 – يتم تحديد نقاط التقاطع للمعادلات أعلاه ومن خلال رسم المستقيمات للوصول للحل الأمثل وكما يلـي :

- معادلة القيد الأول :

$$2X_1 + 3X_2 = 12$$

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 6$

وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها a وتكون إحداثياتها (6,0) .

عندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 4$

فنحصل على نقطة نطلق عليها $\bar{a}$ وتكون إحداثياتها (0,4)

وبذلك يتم رسم القيد بصورة المستقيم والذي يحدد بالنقاط (0,4) و (6,0)

- معادلة القيد الثاني :

$$X_1 + X_2 = 25$$

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 25$

وبذلك نحصل على نقطة نطلق علها b وتكون إحداثياتها (25,0)

عندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 25$

وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها $\bar{b}$ تكون إحداثياتها (0,25) .

- معادلة القيد الثالث :

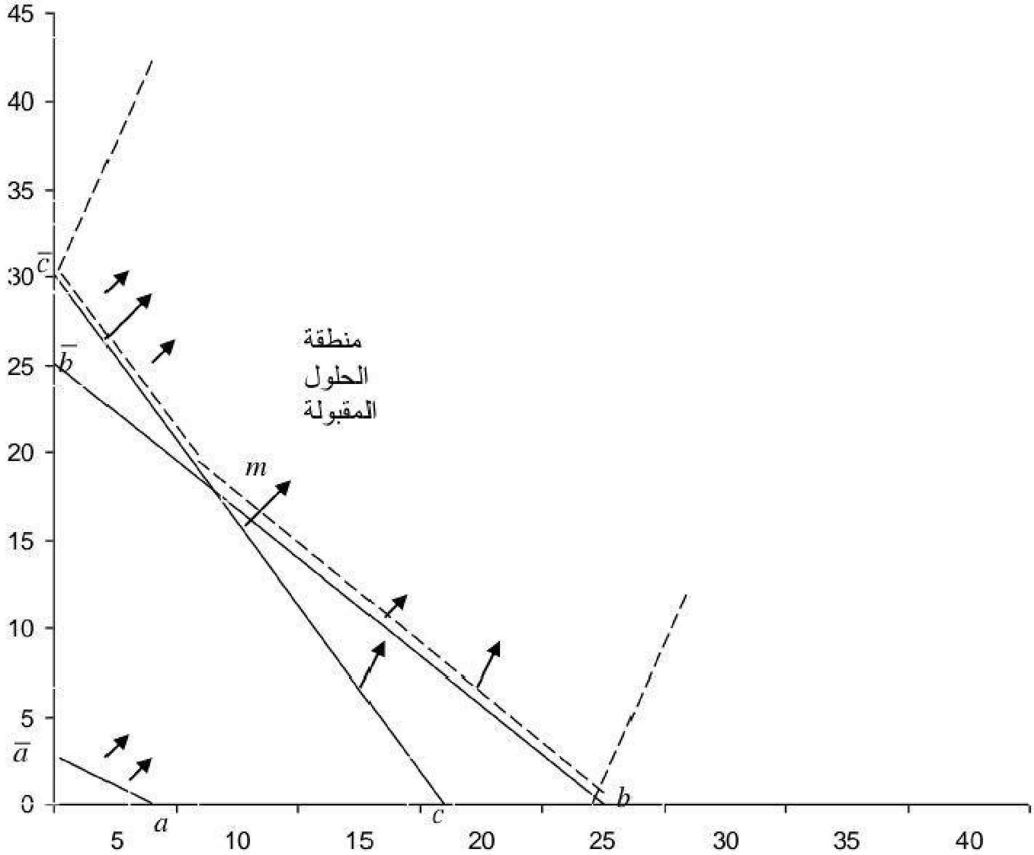
$$5X_1 + 3X_2 = 90$$

عندما $X_2 = 0$ فأن $X_1 = 18$

وبذلك نحصل على نقطة نطلق علها c وتكون إحداثياتها (18,0)

وعندما $X_1 = 0$ فأن $X_2 = 30$

وبذلك نحصل على نقطة نطلق عليها $\bar{c}$ تكون إحداثياتها (0,30) .



إن منطقة الحلول المقبولة هي المنطقة المقعرة والمحددة بالنقاط $\bar{c}mb$.
نلاحظ أنه لم يتم أخذ القيد $a\bar{a}$ بعين الاعتبار حيث أن هذا القيد لا تأثير له على منطقة الحلول المقبولة.

والآن يتم تحديد نقطة تقاطع المستقيمين اللائي تم رسمهما وذلك لتحديد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في آن واحد باستثناء القيد الأول وكما مبين بالشكل أعلاه وبما أن جميع النقاط معلومة ما عدا النقطة m فيتم استخراجها من إحداثيات نقطة التقاطع (الناتجة من تقاطع القيدين الثاني والثالث) إذ نقوم بحل المعادلتين (2) و(3) آنيا وذلك بضرب المعادلة (2) بـ 5 ونطرح منها المعادلة (3) وكما يلي :

$$5X_1 + 5X_2 = 125 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$
$$-5X_1 - 3X_2 = -90 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$2X_2 = 35$$
$$X_2 = 17.5$$

وبتعويض قيمة X_2 في احدى المعادلتين أعلاه نحصل على: $X_1 = 7.5$

النقطة	X_1	X_2	$MinZ = 40X_1 + 3X_2$
b	25	0	1000
m	7.5	17.5	352.5
$\bar{c}$	0	30	90

يتضح من النتائج أعلاه أن نقطة $\bar{c}$ تمثل الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (3)

أوجد قيم $X_1 X_2$ المثلى التي تجعل دالة الهدف أكبر ما يمكن أو بصيغة أخرى أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالي باستخدام الطريقة البيانية:

$$MaxZ = 9X_1 + 7X_2$$
$$S.t:$$
$$10X_1 + 5X_2 \le 50$$
$$6X_1 + 6X_2 \le 36$$
$$4.5X_1 + 18X_2 \le 81$$
$$X_1, X_2 \ge 0$$

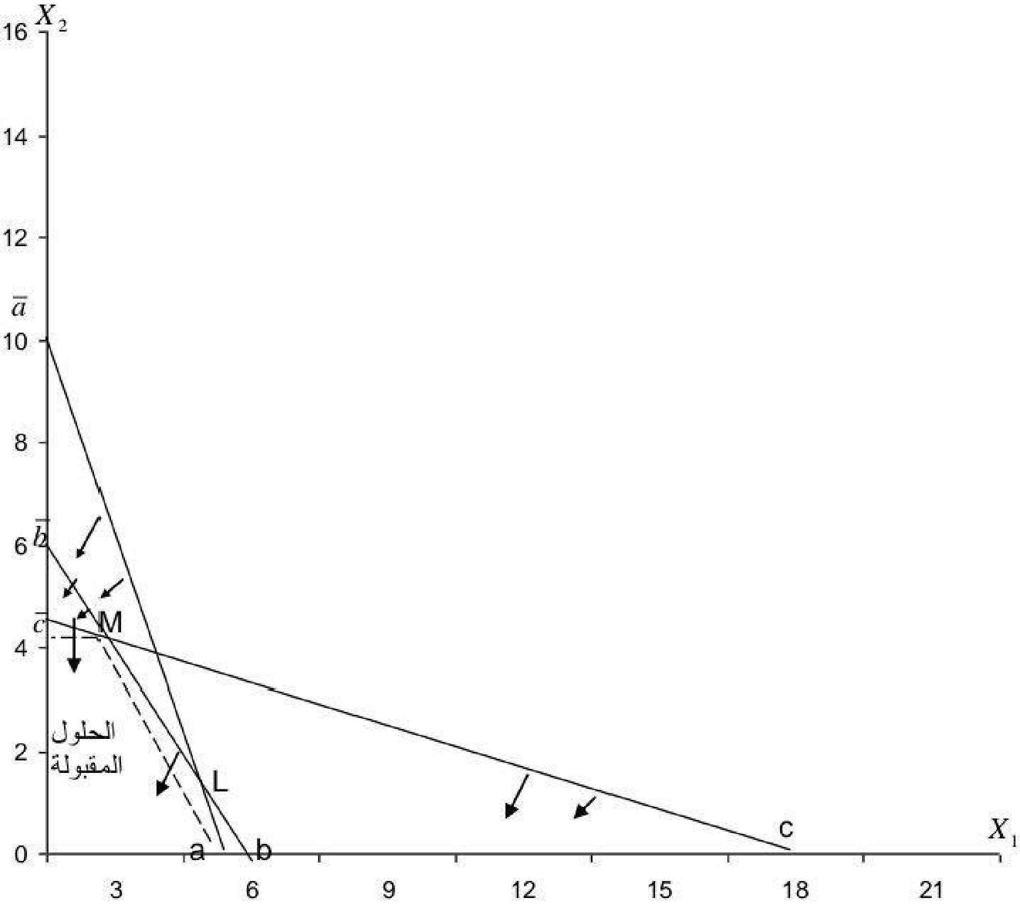
الحل :

1 – تحول المتباينات الى معادلات :

$$10X_1 + 5X_2 = 50.....................(1)$$
$$6X_1 + 6X_2 = 36.......................(2)$$
$$4.5X_1 + 18X_2 = 81...................(3)$$

2 - نرسم المستقيمات بعد تحديد إحداثيات النقاط وبنفس الطرق المتبعة في الأمثلة السابقة وهذه الإحداثيات ستكون كما يلي :

إحداثياتها	النقطة
(5,0)	a
(0,10)	$\bar{a}$
(6,0)	b
(0,6)	$\bar{b}$
(18,0)	c
(0,4.5)	$\bar{c}$



ولما كانت جميع القيود هي من نوع $\leq$ لذلك فأن منطقة الإمكانيات ستكون محددة بالمنطقة ذات الرؤوس $0\bar{c}MLa$ وهي المنطقة التي تحقق القيود مجتمعة وجميع نقاطها تعتبر حلولا لمشكلة البرمجة الخطية إلا أن النقطة المثلى يتم الحصول عليها بالصيغة الرياضية بعد تحديدها بيانيا حيث أن هذه النقطة تحقق أعظم ربح وهي أبعد نقطة من نقطة الأصل فأنها تقع على حدود المنطقة المحدبة في الشكل البياني أعلاه بحيث تمثلها المنطقة المحددة بالرؤوس $0\bar{c}MLa$ لذلك يستوجب الأمر تحديد إحداثيات كل نقطة من تلك النقاط :

1- النقطة 0 إحداثياتها $(0,0)$.

2- النقطة $\bar{C}$ إحداثياتها $(0,4.5)$.

3- النقطة M ويتم الحصول عليها من القيدين الثاني والثالث وكالآتي :

$$6X_1 + 6X_2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$4.5X_1 + 18X_2 = 81 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

بضرب المعادلة (2) × 3 وطرح المعادلة (3) منها وكالآتي :

$$18X_1 + 18X_2 = 108 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$-4.5X_1 - 18X_2 = -81 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$13.5X_1 + 0 = 27$$
$$X_1 = 2$$

وبالتعويض في المعادلة (2) ينتج أن قيمة $X_2 = 4$

إذن إحداثيات النقطة M هي $(2,4)$.

وبنفس الصيغة نجد إحداثيات النقطة L (الناتجة من تقاطع القيدين الاول والثاني) وكالآتي :

$$10X_1 + 5X_2 = 50 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$6X_1 + 6X_2 = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نضرب المعادلة رقم (1) 6 X والمعادلة رقم (2) 5 X فنحصل على:

$$60X_1 + 30X_2 = 300 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$30X_1 + 30X_2 = 180 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبعدها نقوم بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) فينتج:

$$60X_1 + 30X_2 = 300 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$-30X_1 - 30X_2 = -180 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

بالطرح

$$30X_1 = 120$$
$$\Rightarrow X_1 = 4$$

وبالتعويض في احدى المعادلتين نحصل على: $X_2 = 2$

ومن هنا فأن إحداثيات النقطة L هي $(4,2)$

والآن يتم تحديد النقطة ذات الحل الأمثل كما في الجدول التالي :

النقطة	X_1	X_2	$MaxZ = 9X_1 + 7X_2$
0	0	0	0
$\bar{c}$	0	4.5	31.5
M	2	4	46
L	4	2	50
A	5	0	45

ومن الجدول أعلاه يتضح أن النقطة L هي التي تمثل الحل الأمثل.

مثال (4)
أوجد الحل لنموذج البرمجة الخطية الاتية باستخدام الطريقة البيانية:

$$
\begin{aligned}
&MinZ = 3X_1 + 4X_2 \\
&S.t: \\
&4X_1 + 10X_2 \leq 40 \\
&7X_1 + 8X_2 \leq 56 \\
&X_1 \geq 3 \\
&X_1, X_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل :

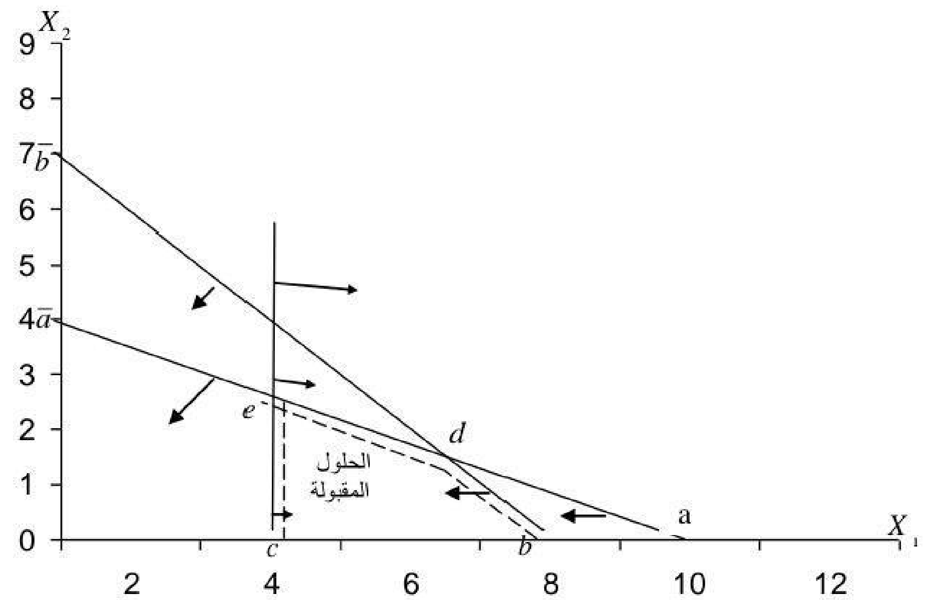
$$
\begin{aligned}
&4X_1 + 10X_2 = 40 \\
&7X_1 + 8X_2 = 56 \\
&X_1 = 3
\end{aligned}
$$

- نستخرج نقاط التقاطع مع المحاور (الإحداثيات) :

القيد الأول : (10,0) ، (0,4)

القيد الثاني : (8,0) ، (0,7)

القيد الثالث : (3,0)



يلاحـــظ أن منطقـــة الحـــل المقبـــول هـــي : $cedb$ لـــذا نســـتخرج إحـــداثيات النقاط d وe وكما يلي:

- نستخرج إحداثيات d الناتجة من تقاطع القيد الاول والثاني :

نضرب القيد الأول في 7 والقيد الثاني في 4 ثم نطرح القيد الثاني من الأول وكما يلي :

$$7(4X_1 + 10X_2 = 40)$$
$$4(7X_1 + 8X_2 = 56)$$

$$28X_1 + 70X_2 = 280$$
$$-28X_1 \mu 32X_2 = -224$$

$$38X_2 = 65 \Rightarrow X_2 = \frac{56}{38} = 1.473$$

وبالتعويض في احدى المعادليتن أعلاه (أي : معادلة القيد الأول أو الثاني) نحصل على قيمة المتغير الاخر وهي:

$$X_1 = 6.315$$

- إحداثيات d : (1.473 ، 6.315)

بنفس الطريقة نستخرج إحداثيات e الناتجة من تقاطع القيد الاول مع القيد الثالث.

$$4X_1 + 10X_2 = 40$$
$$X_1 = 3$$

بما أن قيمة $X_1 = 3$ من خلال معادلة القيد الثالث لذلك نقوم مباشرة بالتعويض في معادلة القيد الاول للحصول على قيمة المتغير الاخر وهي $X_2 = 2.8$

- إحداثيات e : (2.8 ، 3)

النقطة	X_1	X_2	$MinZ = 3X_1 + 4X_2$
c	3	0	9
e	3	2.8	20.2
d	6.315	1.473	24.837
b	8	0	24

بما أن الدالة من نوع min فأن نقطة c تمثل الحل الأمثل.

الطريقة المبسطة Simplex method (طريقة السمبلكس)

نظراً لان طريقة الحل بالرسم البياني لا تصلح لأكثر من متغيرين استلزم الأمر وجود طرائق أخرى للتعامل مع مثل هذه المشكلات، ومن بين هذه الطرائق والتي تصلح للتعامل مع مشكلات البرمجة الخطية طريقة السمبلكس التي ابتكرها دانكز عام 1947 ، وبالإضافة لصلاحية هذه الطريقة للتعامل مع المشكلات ذات المتغيرات كثيرة العدد فأنه يوجد الكثير من برامج الحاسوب الآلي التي تعمل وفق هذه الطريقة.

وتعمل هذه الطريقة بالإعتماد عى حل مقبول ومن ثم تستمر بإسلوب تكراري دوري في تطوير هذا الحل إلى أن نحصل بعد عدد محدد من الخطوات على الحل الأمثل.

وفيما يلي الخطوات الرئيسية لهذه الطريقة :

1. تحويل المسألة إلى الشكل القياسي.
2. تصفير دالة الهدف مع إضافة المتغيرات الوهمية (التي يتم إضافتها لتحقيق شروط الشكل القياسي في الخطوة الاولى أعلاه) بمعامل صفري.
3. عمل جدول الـ (Simplex).
4. تطوير الحل من خلال إدخال متغير ليحل محل متغير اخر (يسمى الأول بالمتغير الداخل والثاني بالمتغير الخارج).
5. تكرار الخطوة الرابعة أعلاه لحين الحصول على الحل الأمثل.

من الجدير بالذكر أنه سوف يتم التطرق فقط لنماذج البرمجة الخطية التي تكون دال الهدف فيها من نوع Max وقيودها من نوع (أصغر أو يساوي)، والمثال أدناه يوضح طريقة الحل بالتفصيل:

مثال (1)

اوجد الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية باستخدام الطريقة المبسطة :

$$MaxZ = 8X_1 + 12X_2$$
$$S\ to\ :$$
$$X_1 + X_2 \leq 10$$
$$3X_1 + 2X_2 \leq 30$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

<u>الحل :</u>

1- نحول الى الشكل القياسي:

$$X_1 + X_2 + S_1 = 10$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_2 = 30$$

2 – نضيف المتغيرات الوهمية الى دالة الهدف بمعامل صفري:

$$MaxZ = 8X_1 + 12X_2 + 0S_1 + 0S_2$$

3 – نحول قيم دالة الهدف الى طرف واحد وفق الصيغة التالية:

$$MaxZ - 8X_1 - 12X_2 - 0S_1 - 0S_2 = 0$$

4 – ترتب دالة الهدف والقيود في جدول Simplex وكما موضح في الجدول أدناه:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
Z	-8	-12	0	0	0
S_1	1	1	1	0	10
S_2	3	2	0	1	30

نقوم الان بتطوير الحل وكما يلي:

<u>تحديد المتغير الداخل والخارج</u>

المتغير الداخل هو المتغير صاحب القيمة الأكثر سالبية في صف الـ (z).
وبذلك يكون X_2 هو المتغير الداخل (صاحب القيمة الأكثر سالبية (12-) في صف z).
ويسمى عمود X_2 في الجدول بـ **(العمود المحوري)**.

أما **المتغير الخارج** فهو صاحب القيمة الأصغر الناتجة من قسمة عناصر العمود (Sol.) على العناصر المناظرة له في العمود المحوري للقيود عدا صف دالة الهدف وكما يلي:

في صف S_1 فأن $\frac{10}{1} = 10$

في صف S_2 فأن $\frac{30}{2} = 15$

ويلاحظ أن اقل نسبة بين النسب هي 10 لذلك فأن S_1 سيكون هو المتغير الخارج.
ويسمى عنصر التقاطع بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج بـ (العنصر المحوري).
ونلاحظ هنا أن العنصر 1 في صف S_1 هو العنصر المحوري (كونه واقع في نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج).

وتبعا لذلك يتم تغيير قيم جدول السمبلكس وكما يلي:

<u>إيجاد معادلة المحور</u>

معادلة المحور تمثل الصف الجديد الذي يحل محل صف المتغير الخارج (هنا: صف S_1 أو الصف الثاني) ويتم إيجاده من خلال قسمة جميع عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (1) وكما يلي:

$$\left[\frac{1\,1\,1\,0\,10}{1\,1\,1\,1\,\;1}\right] \Rightarrow X_2 = (1,1,1,0,10)$$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
X_2	1	1	1	0	10

ويلاحظ أن الصف الناتج أعلاه (للمتغير الداخل X_2) سوف يحل محل صف المتغير الخارج S_1 .

<u>إيجاد بقية الصفوف</u>

يتم إيجاد بقية الصفوف بإستخدام الصيغة:

معادلة الصف الجديد = معادلة الصف القديم – (عنصر التقاطع) * (معادلة المحور)

حيث أن عنصر التقاطع يمثل عنصر تقاطع عمود المتغير الداخل مع الصف المعني.
فلإيجاد القيم الجديدة لصف z نقوم بالاتي:

الصف القديم (-8 -12 0 0 0)

معادلة المحور (1 1 1 0 10) (-12) عنصر التقاطع

بالطرح ــــــــــــــــــــــــــــــ

Z (4 0 12 0 120)

أي

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
Z	4	0	12	0	120

ونفس الإجراء بالنسبة للصف S_2 وكالآتي:

(3 2 0 1 30)

(2) (1 1 1 0 10)

بالطرح ــــــــــــــــــــــــــــــ

S_2 (1 0 -2 1 10)

أي:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
S_2	1	0	-2	1	10

وبذلك يكون الجدول الثاني كما يلي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	Sol.
Z	4	0	12	0	120
X_2	1	1	1	0	10
S_2	1	0	-2	1	10

ولما كانت قيم دالة الهدف (صف Z) جميعها موجبة فهذا يعني اننا وصلنا الى الحل. ويجب ملاحظة أنه في حالة وجود قيم سالبة في صف Z فان ذلك يعني أننا لم نصل للحل الأمثل وبذلك نستمر بالحل وبنفس الطريقة أعلاه حتى نصل **للحل الأمثل بحيث تكون جميع قيم صف Z موجبة.**

مثال (2)

إستخدم طريقة السمبلكس لإيجاد الحل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$$MaxZ = 9X_1 + 7X_2$$

S.to:

$$10X_1 + 5X_2 \leq 50$$
$$6X_1 + 6X_2 \leq 36$$
$$4.5X_1 + 18X_2 \leq 81$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل :

1- نحول الى الشكل القياسي:

$$10X_1 + 5X_2 + S_1 = 50$$
$$6X_1 + 6X_2 + S_2 = 36$$
$$4.5X_1 + 18X_2 + S_3 = 81$$

2 – نضيف المتغيرات الوهمية الى دالة الهدف بمعامل صفري:

$$MaxZ = 9X_1 + 7X_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

3 – نحول قيم دالة الهدف الى طرف واحد وفق الصيغة التالية:

$$MaxZ - 9X_1 - 7X_2 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$$

4 – ترتب دالة الهدف والقيود في جدول Simplex وكما موضح في الجدول أدناه:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	-9	-7	0	0	0	0
S_1	10	5	1	0	0	50
S_2	6	6	0	1	0	36
S_3	4.5	18	0	0	1	81

نقوم الان بتطوير الحل وكما يلي:

تحديد المتغير الداخل والخارج

المتغير الداخل هو المتغير صاحب القيمة الأكثر سالبية في صف الـ (z).

وبذلك يكون X_1 هو المتغير الداخل (صاحب القيمة الأكثر سالبية (9-) في صف z).
ويسمى عمود X_1 في الجدول بـ **(العمود المحوري)**.

أما **المتغير الخارج** فهو صاحب القيمة الأصغر الناتجة من قسمة عناصر العمود (.Sol) على العناصر المناظرة له في العمود المحوري للقيود عدا صف دالة الهدف وكما يلي:

في صف S_1 **فأن** $\frac{50}{10} = 5$

في صف S_2 **فأن** $\frac{36}{6} = 6$

في صف S_3 **فأن** $\frac{81}{4.5} = 18$

ويلاحظ أن اقل نسبة بين النسب هي 5 لذلك فأن S_1 سيكون هو المتغير الخارج.

ويسمى عنصر التقاطع بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج بـ (العنصر المحوري). ونلاحظ هنا أن العنصر 10 في صف S_1 هو العنصر المحوري (كونه واقع في نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج).

وتبعا لذلك يتم تغيير قيم جدول السمبلكس وكما يلي:

إيجاد معادلة المحور

معادلة المحور تمثل الصف الجديد الذي يحل محل صف المتغير الخارج (هنا: صف S_1 أو الصف الثاني) ويتم إيجاده من خلال قسمة جميع عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (10) وكما يلي:

تحديد المتغير الداخل والخارج

المتغير الداخل هو المتغير صاحب القيمة الأكثر سالبية في صف الـ (z).

وبذلك يكون X_1 هو المتغير الداخل (صاحب القيمة الأكثر سالبية (9-) في صف z).
ويسمى عمود X_1 في الجدول بـ **(العمود المحوري)**.

أما **المتغير الخارج** فهو صاحب القيمة الأصغر الناتجة من قسمة عناصر العمود (.Sol) على العناصر المناظرة له في العمود المحوري للقيود عدا صف دالة الهدف وكما يلي:

في صف S_1 فأن $\frac{50}{10} = 5$
في صف S_2 فأن $\frac{36}{6} = 6$
في صف S_3 فأن $\frac{81}{4.5} = 18$

ويلاحظ أن اقل نسبة بين النسب هي 5 لذلك فأن S_1 سيكون هو المتغير الخارج.

ويسمى عنصر التقاطع بين عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج بـ (العنصر المحوري).
ونلاحظ هنا أن العنصر 10 في صف S_1 هو العنصر المحوري (كونه واقع في نقطة تقاطع عمود المتغير الداخل وصف المتغير الخارج).

وتبعا لذلك يتم تغيير قيم جدول السمبلكس وكما يلي:

إيجاد معادلة المحور

معادلة المحور تمثل الصف الجديد الذي يحل محل صف المتغير الخارج (هنا: صف S_1 أو الصف الثاني) ويتم إيجاده من خلال قسمة جميع عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (10) وكما يلي:

$$\begin{bmatrix} \frac{10}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{0}{10} & \frac{0}{10} & \frac{50}{10} \end{bmatrix} \rightarrow X_1 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, 0, 0, 5)$$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
X_1	1	1/2	1/10	0	0	5

ويلاحظ أن الصف الناتج أعلاه (للمتغير الداخل X_1) سوف يحل محل صف المتغير الخارج S_1 .

إيجاد بقية الصفوف

يتم إيجاد بقية الصفوف بإستخدام الصيغة:

معادلة الصف الجديد = معادلة الصف القديم – (عنصر التقاطع) * (معادلة المحور)

حيث أن عنصر التقاطع يمثل عنصر تقاطع عمود المتغير الداخل مع الصف المعني.

فلإيجاد القيم الجديدة لصف z نقوم بالاتي:

الصف القديم (0 0 0 0 7- 9-)

معادلة المحور (5 0 0 $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{2}$ 1) (9-) عنصر التقاطع

بالطرح

$z\ (0 \quad -5/2 \quad 9/10 \quad 0 \quad 0 \quad 45)$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	$-5/2$	9/10	0	0	45

ونفس الإجراء بالنسبة للصف S_2 وكالآتي:

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & (6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 36) \\
(6) & (1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 5) \\
\hline
S_2 & (0 & 3 & \frac{-6}{10} & 1 & 0 & 6)
\end{array}
$$

بالطرح

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
S_2	0	3	$-6/10$	1	0	6

ونفس الإجراء بالنسبة للصف S_3 :

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & (4.5 & 18 & 0 & 0 & 1 & 81) \\
(4.5) & (1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 5) \\
\hline
S_3 & (0 & 15.75 & -0.45 & 0 & 1 & 58.5)
\end{array}
$$

بالطرح

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
S_3	0	15.75	-0.45	1	0	58.5

وبذلك يكون الجدول بالشكل التالي:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	$-5/2$	$9/10$	0	0	45
X_1	1	$1/2$	$1/10$	0	0	5
S_2	0	3	$-6/10$	1	0	6
S_3	0	15.75	-0.45	0	1	58.5

ولمــا كانــت قــيم دالــة الهــدف مــا زال فيهــا قــيم ســالبة فأننــا لــم نصــل للحــل المثــل وبــذلك نســتمر بالحــل وبــنفس الطريقــة أعــلاه حتــى نصــل **للحــل الأمثــل بحيــث تكــون قــيم** $Z \geq 0$.

تحديد المتغير الداخل والخارج

أن أكبـر قيمــة ســالبة هــي $(-5/2)$ التــي تمثــل معامــل X_2 لــذلك فــأن X_2 ســيكون المتغير الداخل ويسمى عمود X_2 في الجدول بالعمود المحوري.

أمــا المتغيــر الخــارج فقــد تــم اســتخراجه مــن خــلال تقســيم قــيم العمــود الاخيــر فــي الجــدول (Sol) علــى العناصــر المنــاظرة لــه فــي العمــود المحــوري للقيــود عــدا صــف دالة الهدف وكما يلي:

في صف X_1 فأن $\frac{5}{\frac{1}{2}} = 10$

في صف S_2 فأن $\frac{6}{3} = 2$

في صف S_3 فأن $\frac{58.5}{15.75} = 3.7$

ويلاحــظ أن اقــل نســبة بــين النســب هــي 2 لــذلك نطلــق علــى العنصــر (3) فــي صف S_2 العنصر المحوري وبذلك فأن S_2 سيكون هو المتغير الخارج .

أي أن X_2 هو المتغير الداخل و S_2 هو المتغير الخارج.

إيجاد معادلة المحور

بعد تقسيم عناصر الصف الخارج (S_2) على العنصر المحوري (3) نحصل على:

$$\left[\frac{0}{3}\frac{3}{3}\frac{-6/10}{3}\frac{1}{3}\frac{0}{3}\frac{6}{3}\right] \quad \rightarrow X_2\ (0 \quad 1 \quad -2/10 \quad 1/3 \quad 0 \ \ 2)$$

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
X_2	0	1	$-2/10$	1/3	0	2

إيجاد بقية الصفوف

بإستخدام نفس المعادلة أعلاه نحصل على:
بالنسبة للصف الأول (z)
يـــتم ضـــرب معادلـــة المحـــور بالعنصـــر المحـــوري المقابـــل لـــ Z وهـــو $(-5/2)$
وطرحها من مصفوفة Z الأصلية وكالآتي:

$$\begin{array}{rl} & (0 \quad -5/2 \quad 9/10 \quad 0 \quad 0 \quad 45) \\ (-5/2) & (0 \quad 1 \quad -2/10 \quad 1/3 \quad 0 \quad 2) \\ \hline Z & (0 \quad 0 \quad 4/10 \quad 5/6 \quad 0 \quad 50) \end{array}$$

بالطرح

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	0	4/10	5/6	0	50

بالنسبة للصف الأول (X_1)
فيتم ضرب معادلة المحور بالعنصر المحوري المقابل لـ X_1 وهو $(1/2)$ وطرحها من مصفوفة X_1 الأصلية وكالآتي:

$$\begin{array}{rl} & (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 0 \quad 5) \\ (1/2) & (0 \quad 1 \quad -2/10 \quad 1/3 \quad 0 \quad 2) \\ \hline X_1 & (1 \quad 0 \quad 2/10 \quad -1/6 \quad 0 \quad 4) \end{array}$$

بالطرح

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
X_1	1	0	2/10	$-1/6$	0	4

بالنسبة للصف الرابع (S_3)

فيتم ضرب معادلة المحور بالعنصر المحوري المقابل لـ s_3 وهو (15.75) وطرحها من مصفوفة s_3 الأصلية وكالآتي :

$$\begin{array}{rcccccc}
 & (0 & 15.75 & -0.45 & 0 & 1 & 58.5) \\
(15.75) & (0 & 1 & -2/10 & 1/3 & 0 & 2\ ) \\
\hline
s_3 & (0 & 0 & 2.7 & -5.25 & 1 & 27)
\end{array}$$
بالطرح

أي :

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
S_3	0	0	2.7	-5.25	1	27

وبذلك يكون لدينا:

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
Z	0	0	4/10	5/6	0	50
X_1	1	0	2/10	$-1/6$	0	4
X_2	0	1	$-2/10$	1/3	0	2
S_3	0	0	2.7	-5.25	1	27

ونتيجة للتوصل الى الحالة التي ليس فيها قيم سالبة في دالة Z فهذا يعني انتهاء العمل والوصول الى الحل الامثل.

مثال (3)
إستخدم طريقة السمبلكس لإيجاد الحل لنموذج البرمجة الخطية التالي:

$MaxZ = 3X_1 + 5X_2 + 3X_3$
S.to
$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 \leq 50$
$3X_1 + 4X_2 + X_3 \leq 40$
$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \leq 20$

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_2 \geq 0$

الحل
التحويل الى الشكل القياسي:

$2X_1 + 3X_2 + 6X_3 + S_1 = 5$
$3X_1 + 4X_2 + X_3 + S_2 = 40$
$3X_1 + 5X_2 + 2X_3 + S_3 = 20$

تصفير دالة الهدف مع إضافة المتغيرات الوهمية:
$MaxZ - 3X_1 - 5X_2 - 3X_3 - 0S_1 - 0S_2 - 0S_3 = 0$

تكوين جدول السمبلكس:

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	-3	-5	-3	0	0	0	0
S_1	2	3	6	1	0	0	50
S_2	3	4	1	0	1	0	40
S_3	3	5	2	0	0	1	20

تحديد المتغيرات الداخلة والخارجة:

X_2 هو المتغير الداخل (لان معامله 5-) .

أما بالنسبة للمتغير الخارج فإن:

في صف S_1 فأن $16.66 = \frac{50}{3}$

في صف S_2 فأن $10 = \frac{40}{4}$

في صف S_3 فأن $4 = \frac{20}{5}$

إذن S_3 هو المتغير الخارج لانه يقابل أقل ناتج قسمة (4)

إيجاد معادلة المحور

قسمة عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (5):

$$\frac{3}{5}\frac{5}{5}\frac{2}{5}\frac{0}{5}\frac{0}{5}\frac{1}{5}\frac{20}{5} \rightarrow \quad X_2 \quad (\ 3/5 \quad 1 \quad 2/5 \quad 0 \quad 0 \quad 1/5 \quad 4\ )$$

إيجاد بقية الصفوف

الصف الأول (z)

$$\begin{array}{rl} & (\ -3 \quad -5 \quad -3 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\ ) \\ (-5) & (\ 3/5 \quad 1 \quad 2/5 \quad 0 \quad 0 \quad 1/5 \quad 4\ ) \\ \hline Z & (\ 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 20\ ) \end{array}$$

بالطرح

الصف الثاني (S_1)

$$\begin{array}{rl} & (\ 2 \quad 3 \quad 6 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 50\ ) \\ (3) & (\ 3/5 \quad 1 \quad 2/5 \quad 0 \quad 0 \quad 1/5 \quad 4\ ) \\ \hline S_1 & (\ 1/5 \quad 0 \quad 24/5 \quad 1 \quad 0 \quad -3/5 \quad 38\ ) \end{array}$$

بالطرح

الصف الثالث (S_2)

$$\begin{array}{lccccccc} & (3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 40) \\ (4) & (3/5 & 1 & 2/5 & 0 & 0 & 1/5 & 4) \\ \hline S_2 & (3/5 & 0 & -3/5 & 0 & 1 & -4/5 & 24) \end{array}$$

بالطرح

وبذلك يكون الجدول الثاني كما يلي :

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	0	0	-1	0	0	1	20
S_1	1/5	0	24/5	1	0	$-3/5$	38
S_2	3/5	0	-3/5	0	1	$-4/5$	24
X_2	3/5	1	2/5	0	0	1/5	4

نستمر بالحل بإتباع نفس الاسلوب لوجود قيمة سالبة في صف z ، وبذلك نحصل على:

تحديد المتغيرات الداخلة والخارجة:

X_3 هو المتغير الداخل (لان معامله 1-) .

أما بالنسبة للمتغير الخارج فإن:

في صف S_1 فأن $\frac{38}{24/5} = 7.9$

في صف S_2 فأن $\frac{24}{3/5} = 8$ (بغض النظر عن الاشارة)

في صف X_2 فأن $\frac{4}{2/5} = 10$

إذن S_1 هو المتغير الخارج لان يقابل أقل ناتج قسمة (7.9)

إيجاد معادلة المحور

قسمة عناصر الصف الخارج على العنصر المحوري (24/5):

$$\frac{1/5}{24/5}\ \frac{0}{24/5}\ \frac{24/5}{24/5}\ \frac{1}{24/5}\ \frac{0}{24/5}\ \frac{-3/5}{24/5}\ \frac{38}{24/5} \Rightarrow$$

x_3 (1/24 0 1 5/24 0 -1/8 95/12)

إيجاد بقية الصفوف

الصف الأول (z)

$$\begin{array}{lccccccc}
 & (0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 20) \\
(-1) & (1/24 & 0 & 1 & 5/24 & 0 & -1/8 & 95/12) \\
\hline
Z & (1/24 & 0 & 0 & 5/24 & 0 & 7/8 & 335/12)
\end{array}$$

بالطرح

الصف الثاني (s_2)

$$\begin{array}{lccccccc}
 & (3/5 & 0 & -3/5 & 0 & 1 & -4/5 & 24) \\
(-3/5) & (1/24 & 0 & 1 & 5/24 & 0 & -1/8 & 95/12) \\
\hline
s_1 & (5/8 & 0 & 0 & 1/8 & 1 & -7/8 & 115/4)
\end{array}$$

بالطرح

الصف الثالث (x_2)

$$\begin{array}{lccccccc}
 & (3/5 & 1 & 2/5 & 0 & 0 & 1/5 & 4) \\
(2/5) & (1/24 & 0 & 1 & 5/24 & 0 & -1/8 & 95/12) \\
\hline
s_2 & (7/12 & 1 & 0 & -1/12 & 0 & 1/4 & 5/6)
\end{array}$$

بالطرح

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	Sol
Z	1/24	0	0	5/24	0	7/8	335/12
X_3	1/24	0	1	5/24	0	$-1/8$	95/12
S_2	5/8	0	0	1/8	1	$-7/8$	115/4
X_2	7/12	1	0	$-1/12$	0	1/4	5/6

والحل الأمثل هنا هو $X_1 = 0$ $X_2 = 5/6$ $X_3 = 95/12$ $Z = 335/12$