الفصل الثالث

النموذج المقابل

الفصل الثالث

النموذج الثنائي (Dual Programming)

إن المشاكل التي تم صياغتها بإسلوب البرمجة الخطية تسمى بالنماذج الأولية (Primal Models) ومن الممكن إعادة صياغة هذه النماذج بإستخدام مايسمى بالنماذج الثنائية (Dual Models). ومن أهم فوائد عملية التحويل هو تقليص الجهد الحسابي المطلوب في تحليل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على عدد كبير من القيود وما دام الحل الأمثل لدالة الهدف في النموذج الأصلي والنموذج الثنائي متطابقان دائما فأن أمامنا خيار للأخذ بالأسهل حلا .

والخطوات التالية تبين لنا كيفية تحويل النماذج الأولية الى نماذج ثنائية:

1- تحول جميع القيود الى متباينات من نوع واحد وكما يلي:
   a- اذا كانت دالة الهدف من نوع Max فالمتباينات تكون من نوع (أقل أو يساوي).
   b- اذا كانت دالة الهدف من نوع Min فالمتباينات تكون من نوع (أكبر أو يساوي).
2- تحول دالة الهدف من Max الى Min وبالعكس.
3- عدد المتغيرات في النموذج الأولي يساوي عدد القيود في النموذج الثنائي والعكس صحيح. وهذا يعني إذا احتوى النموذج الاولي على n من المتغيرات و m من القيود فان النموذج الثنائي سوف يحتوي على m من المتغيرات و n من القيود.
4- تحول القيود من متباينات من نوع (أكبر أو يساوي) الى متباينات من نوع (أقل أو يساوي) والعكس صحيح.
5- معاملات دالة الهدف تصبح قيم الثوابت في القيود والعكس صحيح.
6- معاملات المتغيرات في الصف (i) تصبح معاملات للمتغيرات في العمود (i).
7- يتم إستخدام الرمز Q بدل Z و y بدل x.

والمثال أدناه يوضح كيفية تحويل نموذج أولي الى نموذج ثنائي (مقابل) :

<u>مثال (1)</u>

جد النموذج الثنائي (المقابل) لنموذج البرمجة الخطية أدناه :

$$
\begin{aligned}
& Max Z = 3x_1 + 6x_2 \\
& S.to \\
& 4x_1 + 5x_2 \le 70 \\
& 10x_1 + 6x_2 \le 60 \\
& x_2 \ge 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

<u>الحل:</u>

يتم تغيير إشارة القيد الثالث باعتبار أن الدالة هي دالة تعظيم (Max) أي جعل إشارة كل القيود من نوع واحد وهي (أصغر من ≤) حيث نقوم بعكس إشارة القيد الثالث بضرب القيد الثالث بـ (-1)

فيصبح القيد كما يلي : $-X_2 \le -10$ ويصبح النموذج الأولي كما يلي :

$$
\begin{aligned}
& Max Z = 3X_1 + 6X_2 \\
& S\ to \\
& 4x_1 + 5x_2 \le 70 \\
& 10x_1 + 6x_2 \le 60 \\
& -x_2 \le -10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

الان يمكن القيام بتحويل النموذج الأولي الى النموذج المقابل وكما يلي:-

<u>دالة الهدف:</u>

1- **تحول دالة الهدف من Max الى Min.**

2- **عدد القيود للنموذج الاولي = عدد المتغيرات في دالة الهدف للنموذج الثنائي.**

نلاحظ ان عدد القيود في النموذج الاولي هو 3.

لذلك فان عدد المتغيرات في دالة الهدف للنموذج الثنائي سيكون 3.

3- قيم الثواتب في القيود في النموذج الاولي تصبح معاملات المتغيرات في دالة الهدف في النموذج المقابل.

4- تغير الرموز المستخدمة.

وبذلك تكون دالة الهدف للنموذج الثنائي بالشكل:

$$MinQ = 70y_1 + 60y_2 - 10y_3$$

__القيود__

1- عدد القيود في النموذج الثنائي = عدد المتغيرات في النموذج الاولي.

2- بما ان قيود النموذج الاولي من نوع (أصغر او يساوي) فان قيود النموذج المقابل تكون من نوع (أكبر أو يساوي).

3- معاملات المتغيرات في الصف الاول في النموذج الاولي تصبح معاملات للمتغيرات في العمود الاول في النموذج المقابل.

4- معاملات المتغيرات في دالة هدف النموذج الاولي تصبح قيم الثوابت في قيود النموذج الثنائي.

وبذلك القيود للنموذج الثنائي بالشكل:

$$4y_1 + 10y_2 \geq 3$$
$$5y_1 + 6y_2 - y_3 \geq 6$$

__**قيد عدم السالبية**__ يكون للمتغيرات الجديدة الخاصة بالمتغير الثنائي وكما يلي:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

وبذلك يكون النموذج الثنائي بالشكل التالي:

$$MinQ = 70y_1 + 60y_2 - 10y_3$$

$$S\ to:$$

$$4y_1 + 10y_2 \geq 3$$

$$5y_1 + 6y_2 - y_3 \geq 6$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

مثال (2)

حول النموذج الاولي أدناه الى النموذج الثنائي

نموذج مقابل **Dual Model**	نموذج أولي **Primal Model**
$MaxQ = 7y_1 + 11y_2 + 16y_3$ $S.to$ $2y_1 + y_2 + 5y_3 \leq 1$ $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \leq 3$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$	$MinZ = x_1 + 3x_2$ $S.to$ $2x_1 + x_2 \geq 7$ $x_1 + 3x_2 \geq 11$ $5x_1 + 2x_2 \geq 16$ $x_1, x_2 \geq 0$

يلاحظ ما يأتي :

1. إن النموذج الأولي يحتوي على ثلاث قيود في حين احتوى النموذج الثنائي على قيدين.
2. يحتوي النموذج الاولي على متغيرين بينما يحتوي الثنائي على ثلاث متغيرات .

3. بقيت قيود عدم السالبية على إشاراتها ولكن للمتغيرات الجديدة.

4. أصبحت الثوابت في القيود في النموذج الاولي وهي (16، 11 ،7) معاملات لدالة الهدف في النموذج المقابل.

5. أصبحت معاملات دالة الهدف في النموذج الاولي وهي (1،3) ثوابت في قيود النموج الثنائي

مثال (3)

اكتب النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$
\begin{aligned}
&MinZ = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
&S\ to: \\
&3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\
&5x_1 + 6x_3 \leq 20 \\
&-x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

الحل نلاحظ أن إشارة القيود في النموذج الأولي مختلفة ، لذلك يجب أن نجعل إشارة كل القيود من نوع واحد وهي (أكبر أو يساوي) وذلك لأن دالة الهدف دالة هي Min لذلك نحتاج تغيير إشارة القيد الاول والثاني وذلك بضرب القيود بـ (-1).

وعليه فأن النموذج الأولي سيكون بالشكل:

$$
\begin{aligned}
&MinZ = x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\
&S\ to: \\
&-3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 \geq -18 \\
&-5x_1 - 6x_3 \geq -20 \\
&-x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

ويكون النموذج المقابل كما يلي :

$$
\begin{aligned}
&MaxQ = -18y_1 - 20y_2 + 9y_3 \\
&S\ to: \\
&-3y_1 - 5y_2 - y_3 \le 1 \\
&2y_1 + y_3 \le 1 \\
&-y_1 - 6y_2 + 4y_3 \le -1 \\
&-5y_1 + y_3 \le -1 \\
&y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

<u>أمثلة إضافية للتدريب تحل بمشاركة الطلبة أثناء المحاضرة</u>

حول النموذج الاولي الى نموذج ثانوي في كل مما يأتي:

(1)

$$\begin{aligned}
&MaxZ = 3X_1 + 4X_2 + X_3 \\
&S\ to \\
&5X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 9 \\
&3X_1 + X_2 + 6X_3 \geq 7 \\
&X_j \geq 0
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
&MaxZ = 12X_1 + 14X_2 + 7X_3 \\
&S\ to \\
&3X_1 + 5X_2 + 2X_3 \geq 12 \\
&4X_2 + 7X_3 \leq 9 \\
&8X_1 + 11X_3 \geq 13 \\
&X_j \geq 0
\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}
&MinZ = 30X_1 + 43X_2 \\
&S\ to \\
&2X_1 + 7X_2 \geq 62 \\
&10X_1 - 3X_2 \leq 51 \\
&11X_1 \leq 78 \\
&X_j \geq 0
\end{aligned}$$